INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK SoSe 2004

8. Übungsblatt Abgabe: 10.6.2004, vor der Vorlesung

Termine: Die 1. Klausur findet am Samstag, den 12.6.2004, von 10-12 Uhr im Audimax statt. **Hilfsmittel** sind nicht zugelassen. Bitte denken Sie daran, Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis mitzubringen!

---

31. **Variationsrechnung I (keine Abgabe, große Übung)**
Berechnen Sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene.

32. **Variationsrechnung II (6 Punkte)**

Für Fluggesellschaften ist es von Bedeutung, den schnellsten Weg von einem Ort zum anderen zu finden: Gesucht ist also die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass der Abstand zweier Punkte als

$$A = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} du$$

dargestellt werden kann, wobei $\dot{x} = \frac{dx}{du}$, und u ist der Bahnparameter.

(b) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem auf die Differentialgleichung

$$2\lambda\vec{r} + \frac{d}{du}\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = 0$$

führt, wobei λ ein Lagrangeparameter ist.

(c) Ersetzen Sie in dieser Differentialgleichung die Ableitungen nach u durch Ableitungen nach s, multiplizieren Sie die Gleichung vektoriell mit $\vec{r}$ und integrieren Sie einmal.

(d) Wenn Sie die Gleichung jetzt mit $\vec{r}$ skalar multiplizieren, können Sie das Ergebnis ablesen.

33. **Fermat'sches Prinzip (3 Punkte)**

Das Fermat'sche Prinzip der geometrischen Optik besagt, dass ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 denjenigen Weg wählt, für den die optische Weglänge

$$\Delta = \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds$$

extremal wird, wobei $n(s)$ der Brechungsindex ist. Leiten Sie daraus das Brechungsgesetz $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ für die Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zweier Medien der Brechungsindizes n_1 und n_2 her, indem Sie die Nebenbedingung $|x_1| + |x_2| =$ const durch die Einführung eines Lagrangeparameters λ berücksichtigen. Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen, um λ zu eliminieren. Die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sind (x_1, z_1) bzw. (x_2, z_2).