INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK SoSe 2004

7. Übungsblatt Abgabe: Präsenzübung, freiwillige Abgabe (bis 7.6.04, 13 Uhr)

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).

25. **Harmonischer Oszillator IV (0 Punkte)**
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators mit $f(t) = 0$ (vgl. Aufgabe 12) für (i) $0 < \gamma < \omega_0$; (ii) $\gamma = \omega_0$; (iii) $0 < \omega_0 < \gamma$. Geben Sie jeweils die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ an.

26. **Konservative Kraftfelder (3 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass folgendes Kraftfeld konservativ ist:

$$\vec{K} = (2x - 2z, 2y, -2x) .$$

(b) Überprüfen Sie, dass alle Wegintegrale $\oint \vec{K} \cdot \vec{ds}$ längs Kreisen in der xy-Ebene mit Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) verschwinden.

(c) Ermitteln Sie das zu $\vec{K}$ gehörige skalare Potential $V(\vec{r})$.

27. **Auffinden der Bewegungsgleichung (4 Punkte)**
Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich unter Einfluß der Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$ auf der Kurve $z = kx^3$ mit $k =$const.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Newtonschen Mechanik unter expliziter Berechung und Elimination von Zwangskräften $\vec{Z} = \vec{Z}(z, \dot{z})$ auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Prinzip von d'Alembert auf.

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion an. Leiten Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung ab.

28. **Morse-Potential (5 Punkte)**
Ein einfaches Modell für den eindimensionalen Potentialverlauf bei Molekülen ist das sogenannte Morse Potential:

$$V(x) = A\,[(\,e^{-\alpha x} - 1)^2 - 1]; \quad A > 0; \quad \alpha > 0 .$$

Hier soll der Fall Gesamtenergie $E < 0$ betrachtet werden, d.h., gebundene Bewegungen eines Massenpunktes der Masse m in diesem Potential.

(a) Geben Sie die Kraft $\vec{K}$ an.

(b) Skizzieren Sie $V(x)$.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrpunkte.

(d) Zeigen Sie, dass sich für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage harmonische Oszillationen ergeben. Berechnen Sie für diesen Grenzfall die Periode T der Schwingung (i) durch Lösen der BWGL, (ii) durch explizite Berechnung des aus Aufg. 11 bekannten Integrals für die Periode.

$\rightarrow$ *Bitte wenden!*

29. **Lissajous-Figuren (5 Punkte)**
Betrachtet wird ein dreidimensionaler harmonischer Oszillator mit richtungsabhängiger Rückstellkraft $\vec{K} = -(D_x x, D_y y, D_z z)$.

(a) Ist das Kraftfeld konservativ? Wenn ja, geben Sie das Potential an.
(b) Handelt es sich bei der Kraft um eine Zentralkraft? Ist der Drehimpuls erhalten? Ist die allgemeine Bewegung eben?
(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die allgemeine Lösung an.
(d) Geben Sie ein Kriterium für das Frequenzverhältnis $\omega_x/\omega_y/\omega_z$ an, so dass die Bewegung periodisch verläuft. ($\omega_i = \sqrt{D_i/m}$).
(e) Zeichnen Sie die Bahnkurven (Lissajous-Figuren) in der xy-Ebene mit $x_0 = v_{x0} = y_0 = v_{y0} = 1$, $z_0 = v_{z0} = 0$, $\omega_x = 1$, $\omega_y = 2, 3, 2.4, 0.679$. Hierzu können Sie natürlich Computerprogramme Ihrer Wahl verwenden.

30. **Wissens- und Verständnisfragen (0 Punkte)**

(a) Wie ist das Drehmoment definiert?
(b) Wie kann man den Gradienten einer skalaren Funktion $f = f(x, y, z)$ geometrisch interpretieren?
(c) Was versteht man unter einem Inertialsystem?
(d) Was besagt das Galileische Relativitätsprinzip?
(e) Geben Sie jeweils eine Parametrisierung an: Kreis, Ellipse, Hyperbel, Schraubenlinie.
(f) Wie lauten die Lagrange-Gleichungen für nicht-konservative Systeme?
(g) Wie ist der Massenschwerpunkt eines Systems von N Massenpunkten definiert?
(h) Geben Sie das totale Differential einer skalaren Funktion $f = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ an!
(i) Wann nennt man ein Kraftfeld konservativ? Welche gleichwertigen Kriterien gibt es?
(j) Wie sind Kugel- bzw Zylinderkoordinaten definiert?
(k) Was sind holonome bzw. skleronome Zwangsbedingungen?
(l) Was versteht man unter dem Begriff Freiheitsgrad?
(m) Wie lautet das d'Alembertsche Prinzip? Formulieren Sie seine physikalische Aussage in Worten und erläutern Sie die auftretenden Größen!
(n) Unter welchen Bedingungen folgen aus dem d'Alembertschen Prinzip die Lagrange-Gleichungen?
(o) Was sind generalisierte Kräfte?
(p) Was versteht man unter dem Begriff *Integral der Bewegung*?
(q) Wieso versucht man, zyklische Variablen zu finden?
(r) Was besagt das Noethersche Theorem?
(s) Die Lagrangefunktion sei nicht explizit von der Zeit abhängig, d.h., $L = L(q_i, \dot{q}_i)$. Welcher Erhaltungssatz folgt daraus?
(t) Wie lautet das Gravitationspotential?
(u) Geben Sie die Lagrangefunktion des ungedämpten harmonischen Oszillators an!
(v) Skizzieren Sie Amplitude und Phase der stationären Lösung des mit $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ angetriebenen harmonischen Oszillators als Funktion von ω!
(w) Geben Sie jeweils die Bewegungsgleichung sowie die Eigenfrequenz des ungedämpften und des gedämpften harmonischen Oszillators an!
(x) Verdeutlichen Sie an je einem Beispiel die Verfahren *Trennung der Veränderlichen* und *Variation der Konstanten*!
(y) Es gelte $|\vec{v}|$ =const. Folgern Sie daraus, dass die kinetische Energie konstant ist! Was läßt sich über die Richtung von $\vec{v}$ aussagen?
(z) Wie sind generalisierte Impulse definiert?