INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK — SoSe 2004

6. Übungsblatt — Abgabe: 27.05.2004, vor der Vorlesung

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).

22. **Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (14 Punkte)**

Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich im Potential

$$V(x,y,z) = \lambda|\vec{r}|^2 \qquad \vec{r} = (x,y,z) \qquad \lambda > 0\,.$$

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die Gesamtenergie des Systems in ebenen Polarkoordinaten an. Bestimmen Sie die zyklische Koordinate und die zugehörige Erhaltungsgröße, den Drehimpuls L.

(b) Verwenden Sie den Drehimpuls, um die Winkelabhängigkeit der Energie zu eliminieren. Ermitteln und skizzieren Sie das daraus resultierende effektive Potential V_{eff} für die Fälle $L = 0$ und $L \neq 0$. Argumentieren Sie anhand Ihrer Skizzen, wie die Bahnen qualitativ aussehen. Bestimmen Sie außerdem mögliche Extrema $(r_0, V_{\text{eff}}(r_0))$ des effektiven Potentials. Wo liegen die Umkehrpunkte (d.h., welches sind die extremalen r bei gegebenem E und L)?

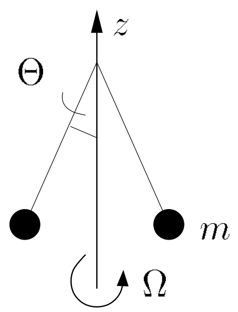
(c) Folgern Sie aus der Drehimpulserhaltung $\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}$ und ersetzen Sie im Ausdruck für die Energie die zeitliche durch eine Winkelableitung.

(d) Trennen Sie in der Gleichung für die Energie die Variablen r und φ und gewinnen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$ durch Integration. Substitution von $r = 1/\sqrt{x}$ ist hier hilfreich.
Hinweis: das Ausnutzen der Substitution ist Teil der Aufgabe, das resultierende Integral kann einer geeigneten Integraltafel entnommen werden.

(e) Transformieren Sie die Bahnkurve in kartesische Koordinaten. Die beiden Koordinatenachsen sollen hierbei so gewählt werden, dass sie in die Richtungen extremaler Auslenkung der Bahn zeigen. Was für eine Bahnkurve ergibt sich, wo liegt das Kraftzentrum?

23. **Der Fliehkraftregler (8 Punkte, freiwillige Abgabe)**

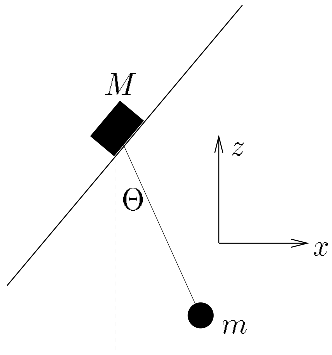
Für den skizzierten Fliehkraftregler berechne man den(die) Winkel Θ_0 für die Gleichgewichtslage(n) bei einer Drehung mit Frequenz Ω sowie die Frequenz(en) kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage(n) Θ_0. Die Massen unterliegen der Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$.



→ *Bitte wenden!*

24. **Ein Pendel (keine Abgabe, große Übung)**

Ein Klotz der Masse M gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. An diesem Klotz ist über einen masselosen Faden der Länge l eine zweite Masse m angehängt. Es wirke die Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die BWGL für dieses System mit geeigneten generalisierten Koordinaten auf.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Lösung mit konstantem Θ_0 gibt, und berechnen Sie dieses.

(c) Bestimmen Sie für $m \ll M$ und $|\Theta - \Theta_0| \ll 1$ (also für kleine Auslenkungen aus dem Gleichgewicht) die Schwingungsfrequenz des Pendels.