INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

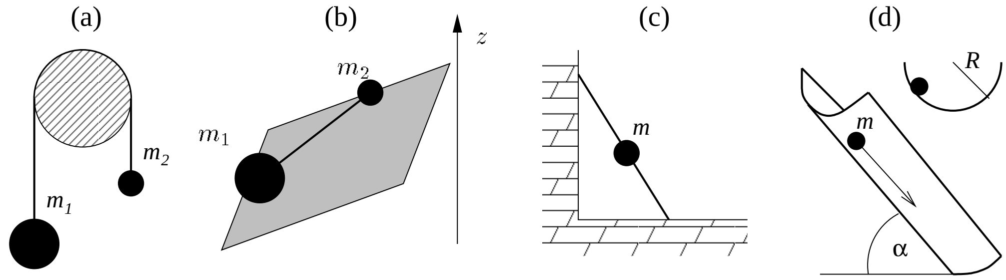
Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK — SoSe 2004

5. Übungsblatt — Abgabe: Freitag, 21.05.2004, bis 12:30 Uhr !

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).

17. **Langrangefunktion (abzugeben sind: (a) und (b), 7 Punkte)**
Geben Sie für folgende Situationen geeignete generalisierte Koordinaten, die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen an. Es wirke jeweils die Schwerkraft als äußere Kraft in $-\vec{e}_z$-Richtung. Die Bewegungsgleichungen sollen nicht gelöst werden.
   (a) Zwei Massen m_1 und m_2, verbunden mit einem masselosen Faden der Länge l, der reibungsfrei über einen Metallstab gleitet, der sich nicht mitdreht. *Hinweis:* die Massen sollen nicht schwingen.
   (b) Zwei Massen m_1 und m_2, verbunden durch einen masselosen Stab der Länge l, die sich reibungsfrei auf einer schiefen Ebene bewegen. *Hinweis:* transformieren Sie auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten!
   (c) Ein Massenpunkt, befestigt auf einem masselosen Stab der Länge l, der reibungsfrei in einer Ecke abgleitet (zweidimensional!).
   (d) Eine Masse, die in einem schräg liegenden Kreiszylinder reibungsfrei abrutscht.



18. **Zyklische Koordinate I (keine Abgabe, große Übung)**
Ermitteln Sie die kinetische Energie eines Teilchens, das sich auf dem Mantel eines Zylinders mit Radius R bewegt, in Zylinderkoordinaten an. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z})$. Berechnen Sie die kanonischen Impulse. Erkennen Sie eine zyklische Koordinate? Was bedeutet diese für den zugehörigen kanonischen Impuls? Geben Sie die Bewegungsgleichungen an.

19. **Zyklische Koordinate II (3 Punkte)**
Ermitteln Sie die kinetische Energie eines Teilchens, das sich auf einer Kugelschale mit Radius R bewegt, in Kugelkoordinaten an. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\varphi, \dot{\varphi}, \vartheta, \dot{\vartheta})$. Berechnen Sie die kanonischen Impulse. Erkennen Sie eine zyklische Koordinate? Was bedeutet diese für den zugehörigen kanonischen Impuls? Geben Sie die Bewegungsgleichungen an.

→ *Bitte wenden!*

20. **Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (6 Punkte)**
Ein Massenpunkt bewegt sich im Potential $V(x, y) = (\lambda/2)(x^2 + y^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten in zwei unabhängige Bewegungen zerfällt. Demzufolge können sofort 3 Erhaltungsgrößen angegeben werden, nämlich die Energien E_x und E_y der beiden unabhängigen Bewegungen, sowie der Drehimpuls L (Hinweis: $\vec{L}$ steht senkrecht zur Bahn, also ist nur $L_z \neq 0$). Geben Sie die Erhaltungsgrößen als Funktion von x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ an.

(b) Ersetzen Sie im Ausdruck für das Quadrat des Drehimpuls L^2 jeweils $\dot{x}^2$ und $\dot{y}^2$ mit Hilfe von E_x bzw. E_y.

(c) Zeigen Sie, dass $I_4 = \dot{x}\dot{y} + \frac{\lambda}{m}xy$ eine Erhaltungsgröße ist. Verwenden Sie I_4, um den Ausdruck aus (b) zu vereinfachen. Sie erhalten so die Bahnkurve in kartesischen Koordinaten. Offensichtlich macht die Kenntnis ausreichend vieler Erhaltungsgrößen die Integration der Bewegungsgleichungen überflüssig. Fertigen Sie eine Skizze für (i) $E_x = E_y; I_4 = 0$; (ii) $E_x = E_y; I_4 \neq 0$; (iii) $E_x \neq E_y; I_4 \neq 0$. Es gelte jeweils $E_x \neq 0, E_y \neq 0, L \neq 0$.

21. **Translationen und Symmetrietransformationen (4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{c}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad c = \text{const}$$

nicht invariant unter Translationen $\vec{r}\,' = \vec{r} + \epsilon\vec{a}$ mit $\vec{a}$ =const ist. Betrachten Sie dazu infinitesimal kleine ϵ und entwickeln Sie das Potential $V(\vec{r}\,') = -c/r'$ bis zur ersten Ordnung in ϵ.

(b) Zeigen Sie, dass die Transformation $x' = x + a\sin(\omega_0 t)$ eine Symmetrietransformation des ungedämpften harmonischen Oszillators ist, wobei ω_0 die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators ist. Berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße.