INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK SoSe 2004

4. Übungsblatt Abgabe: 13.05.04, vor der Vorlesung

Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).

8. **Die verschwundene Aufgabe (keine Abgabe, große Übung)**
Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich unter Einfluß der Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$ auf der Kurve $x^2 + kz^3 = 0$ mit $k =$const.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Newtonschen Mechanik unter expliziter Berechung und Elimination von Zwangskräften $\vec{Z} = \vec{Z}(z, \dot{z})$ auf.

   (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Prinzip von d'Alembert auf.

   (c) Geben Sie die Lagrangefunktion an. Leiten Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung ab.

   (d) Bestimmen Sie dasjenige k_0, für dass die Geschwindigkeit in z-Richtung konstant ist.

   (e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall $k = k_0$ mit den Anfangswerten $x(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{z}(0) = v_0$.

13. **Bewegungsgleichung: Vergleich der Methoden**
Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich unter Einfluß der Schwerkraft $\vec{K} = -mg\vec{e}_z$ auf der Kurve $z = kx$; $k =$const.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Newtonschen Mechanik unter expliziter Berechung und Elimination von Zwangskräften $\vec{Z} = \vec{Z}(x, \dot{x})$ auf.

   (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Prinzip von d'Alembert auf.

   (c) Geben Sie die Lagrangefunktion an. Leiten Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung ab.

   (d) Lösen Sie die Differentialgleichung für $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

14. **d'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen II. Art**
Stellen Sie für das in Aufgabe 10 beschriebene Problem (d.h., die Bewegung auf der Kurve $z = a[1-\cosh(x/b)]$) die Bewegungsgleichung (i) mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips, (ii) mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen II. Art auf.

→ *Bitte wenden!*

15. **d'Alembert für zwei Massenpunkte**
Zwei Massenpunkte gleicher Masse bewegen sich auf zwei konzentrischen Kreisen mit Radien R_1, R_2 mit $R_1 < R_2$ und sind durch einen masselosen Stab der Länge $l \geq R_2 - R_1$ verbunden. Es gibt daher 3 Zwangsbedingungen und somit nur einen Freiheitsgrad.

    (a) Geben Sie alle drei Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten x_i, y_i, $i = 1, 2$, an (Ursprung im Mittelpunkt der Kreise; $i = 1$: Massenpunkt auf innerem Kreis, $i = 2$: Massenpunkt auf äußerem Kreis).

    (b) Führen Sie ebene Polarkoordinaten r_i, φ_i, $i = 1, 2$, ein. Verwenden Sie als generalisierte Koordinate φ_1 und stellen Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips die BWGL für φ_1 auf.

    (c) Lösen Sie die BWGL und geben Sie die allgemeine Lösung für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ an.

16. **Harmonischer Oszillator III: Variation der Konstanten**
Betrachten Sie den angetriebenen, ungedämpften, harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)\,. \tag{1}$$

    (a) Überführen Sie Gleichung (1) in ein System von DGLn 1. Ordnung der Form

    $$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t). \tag{2}$$

    Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\vec{x} = \vec{c}e^{\lambda t}$, $\vec{c} =$const, die allgemeine Lösung der zu Gleichung (2) gehörenden homogenen DGL in der Form

    $$\vec{x}_h(t) = a\,\vec{c_1}e^{\lambda_1 t} + b\,\vec{c_2}e^{\lambda_2 t}; \quad a, b = \text{const}.$$

    (b) Zeigen Sie für eine beliebige Funktion $f(t)$, dass man mit dem Ansatz *Variation der Konstanten*

    $$\vec{x}_p(t) = a(t)\vec{c_1}e^{\lambda_1 t} + b(t)\vec{c_2}e^{\lambda_2 t}$$

    eine partikuläre Lösung $\vec{x}_p(t)$ (d.h., eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL) der Gl. (2) finden kann.

    (c) Geben Sie die allgemeine Lösung von Gleichung (2) für $f(t) = k \sin(\omega t)$ an. Wie sieht dann die allgemeine Lösung von Gleichung (1) aus?