INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

MECHANIK — SoSe 2004

2. Übungsblatt — Abgabe: 29.04.04, vor der Vorlesung

Termine:

1. Klausur, Sa., 12.6.04, 10-12 Uhr, AM
2. Klausur, Mo., 9.8.04, 9-11 Uhr, AM

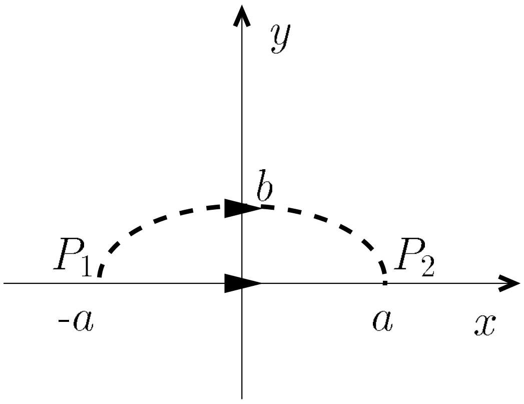
Bei Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184 (**Sprechstunde:** montags, 11:30-12:30 Uhr und dienstags, 10:00-11:00 Uhr).
WWW-Seite zu dieser Vorlesung:
http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose-04/mech04

4. **Arbeit, Linienintegrale**

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{K} = k(y + x, 2x, 0);\ k = \text{const.}$$

Berechnen Sie die verrichtete Arbeit, wenn ein Massenpunkt in der xy-Ebene vom Punkt $P_1 = (-a, 0, 0)$ in den Punkt $P_2 = (a, 0, 0)$ verschoben wird, und zwar (i) entlang der x-Achse und (ii) entlang der oberen Hälfte der Ellipse mit Halbachsen a, b, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt (siehe Skizze). Ist das Kraftfeld konservativ?



5. **Konservative Kraftfelder und Potentiale**

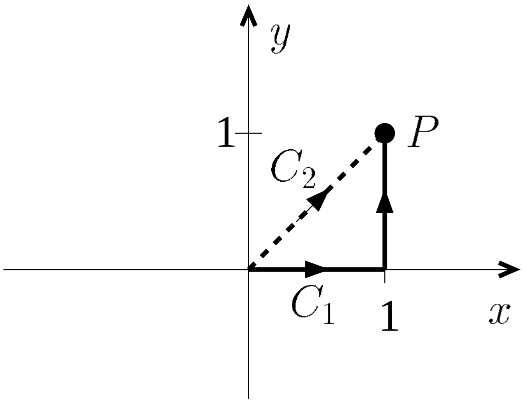
Gegeben sei das skalare Potential

$$V = k\,(x^2y^2z^2 + x^3 + y);\ k = \text{const.}$$

(a) Berechnen Sie das Kraftfeld $\vec{K} = -\nabla V$.

(b) Berechnen Sie $\text{rot}\vec{K}$.

(c) Ein Massenpunkt wird in der xy-Ebene im Kraftfeld $\vec{K}$ vom Ursprung in den Punkt $P = (1, 1, 0)$ verschoben. Berechnen Sie die verrichtete Arbeit entlang der skizzierten Wege C_1 und C_2 durch explizite Berechnung der Linienintegrale. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Welche alternative Methode zur Berechnung der Arbeit gibt es in diesem Fall?



→ *Bitte wenden!*

6. **Drehimpuls**
Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich mit $|\vec{v}|$ =const auf einem Kreis mit Radius R. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt, indem Sie (i) $\vec{L}$ bezogen auf den Mittelpunkt $\vec{M}$ des Kreises bestimmen und (ii) $\vec{L}$ bezogen auf einen Punkt P bestimmen, der in der Kreisebene liegt und den Abstand $a > R$ vom Mittelpunkt des Kreises hat.

7. **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn ($y = y(x)$) und verwenden Sie bei ii. die Methode *Variation der Konstanten* (beachten Sie, dass die allgemeine Lösung einer DGL 1. Ordnung genau eine Integrationskonstante enthalten muß):

   i. $xy^2 - e^x y' = 0$ ii. $y' = 4y - x^2$.

   (b) Lösen die folgenden Anfangswertprobleme (AWP):

   i. $(1 + x^2)y' + xy = x;\ y(0) = 0$ ii. $y' + y = \sin(x);\ y(0) = 0$.

   (c) Ein spezieller Typ von nicht-linearen DGLn, die sich mit einem Trick auf eine lineare DGL zurückführen lassen, ist die sogenannte *Bernoulli*-DGL:

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0;\ \alpha \neq 1\,. \tag{1}$$

   Multipliziert man die Gleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, dann überführt die Substitution $z = y^{1-\alpha}$ Gl. (1) in eine lineare DGL. Lösen Sie mit Hilfe dieses Ansatzes das folgende AWP:

$$2\cos(x)y' = y\sin(x) - y^3; \quad y(0) = 1\,.$$

   Hinweis: zum Lösen der auftretenden Integrale hilft es, sich die Ableitung von $\tan(x)$ zu vergegenwärtigen.

   (d) Betrachten Sie die allgemeine, homogene lineare DGL n-ter Ordnung mit reellen Funktionen $a_i = a_i(x)$:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0; \quad y = y(x)\,. \tag{2}$$

   Zeigen Sie, dass der Lösungsraum dieser DGL (d.h., die Menge aller Funktionen $y(x)$, die Gl. (2) erfüllen) ein reeller(komplexer) Vektorraum ist.
   Hinweis: nehmen Sie an, dass $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen von Gl. (2) sind. Zeigen Sie, dass dann auch $y = cy_1$ und $y = y_1 + y_2$ Lösungen ergeben (c = const und reell(komplex)).