



- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

## Klausurvorbereitungszettel

### Aufgabe 1: Taylorentwicklung

Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $f(x) = \sqrt{a + \sin x}$ . Berechnen Sie die Fourier Entwicklung von  $f(x)$  bis einschließlich dritte Ordnung in  $x$  um  $x = 0$ .

### Aufgabe 2: Integrale

Geben Sie zu den folgenden Funktionen die Stammfunktion an

a)  $f(x) = \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4}$

b)  $g(x) = \cos^2(x)$

c)  $h(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$

### Aufgabe 3: Vektoralgebra

Seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  drei linear unabhängige Vektoren. Berechnen Sie

$$\langle \vec{c} | \vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c})) \rangle.$$

### Aufgabe 4: Skalarprodukte

Es seien die Funktionen

$$u_1(x) = \sqrt{3}(1 - 2x)$$

$$u_2(x) = 7(x^2 + 2x - 1)$$

und das Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

gegeben.

- a) Berechnen Sie  $\langle u_1 | u_2 \rangle$ .
- b) Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren um eine funktion  $\tilde{u}_2(x)$  zu bestimmen die Senkrecht auf  $u_1$  steht.

### Aufgabe 5: Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem sei gegeben durch

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -9$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

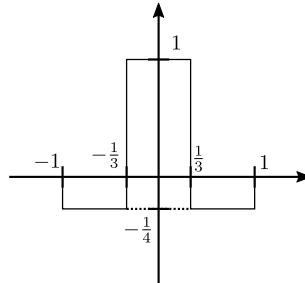
$$-3x_1 + x_3 = -3$$

$$2x_2 + 2x_4 = -6.$$

- a) Formulieren Sie das Gleichungssystem mit einer Matrix. Berechnen Sie die Determinante und prüfen Sie ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist
- b) Geben Sie alle Lösungen für das Gleichungssystem an

## Aufgabe 6: Fourierreihe und Fouriertransformation

a) Eine Funktion sei durch periodische Fortsetzung von



gegeben. Geben Sie die Fourierreihe an.

*Hinweis:* Die Fourierreihe lautet:

$$FR(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  für  $n > 0$  gegeben sind durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int f(x) \cos(\omega_n x) dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int f(x) \sin(\omega_n x) dx.$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_n$  und die Periode  $T$  müssen passend gewählt werden.

b) Geben Sie die Definition der Fouriertransformation und die Rücktransformation an. Es sei nun eine Funktion  $f(x)$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie die Fouriertransformierte.

## Aufgabe 7: Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung sei gegeben durch

$$y'(x) = \frac{2xy(x) + x}{x^2y(x) - y(x)}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung  $y(0) = \sqrt{2}$ .