INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
P. Meier, M. Sc.

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

1. **Wissensfragen**

   Benennen Sie alle auftretenden Größen und Symbole.

   (a) Was ist eine Galilei-Transformation und was besagt das Galileische Relativitätsprinzip?

   (b) Was ist eine Zentralkraft? Welche Erhaltungsgröße folgt daraus?

   (c) Wie sind Schwerpunkt und reduzierte Masse beim Zweikörperproblem definiert?

   (d) Was ist eine virtuelle Verrückung?

   (e) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art an.

   (f) Was ist eine kanonische Transformation und was ist das Ziel einer solchen Transformation?

   (g) Zeigen Sie: $\{A, q_a\} = -\partial_{p_a} A$ für eine beliebige Funktion A der generalisierten Koordinaten und Impulse.

   (h) Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung für ein freies Teilchen ist

   $$S(x_a, c_a, t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 - \frac{1}{2m}\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right) t \quad .$$

   Was stellt S anschaulich dar? Bestimmen Sie hieraus die Bewegung eines freien Teilchens in der Form $x_a = x_a(t)$.

   (i) Wie lautet der Satz von Liouville?

   (j) Was besagt der Eulersche Satz über Drehungen starrer Körper?

2. **Parabelförmige Bahn**

   Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn in der Ekliptik (Bahnebene der Erde) um die Sonne. Der Perihelabstand betrage ein Drittel des Erdbahnradius. Die Erdbahn sei als kreisförmig angenommen. Bestimmen Sie die Zeit T, die sich der Komet innerhalb der Erdbahn aufhält.

   (a) Skizzieren Sie die Kometenbahn.

   (b) Gehen Sie von der Erhaltung des Drehimpulses L aus und zeigen Sie zunächst

   $$L\,T \sim \int\limits_0^{\arccos(-1/3)} \frac{1}{(1+\cos\phi)^2}\,d\phi \quad .$$

   Das Integral ergibt $5/(3\sqrt{2})$.

   (c) Begründen Sie, dass das effektive Potential des Kometen am Perihel gleich null ist und bestimmen Sie daraus den Drehimpuls L.

   (d) Kombinieren Sie ihre Ergebnisse aus (b) und (c) und berechnen Sie T.

3. **d'Alembertsches Prinzip**

   Ein Massenpunkt mit konstanter Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\underline{F} = -mg\underline{e}_3$ auf der Kurve $x_3 = -k\ \ln(x_1/a)$ mit $x_1, k, a > 0$.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Prinzip von d'Alembert auf (ohne LI und LII).

   (b) Geben Sie die wirkende Zwangskraft in der Form $\underline{Z} = \underline{Z}(\underline{x}, \dot{\underline{x}})$ an.

4. **Zentralkraftpotential**

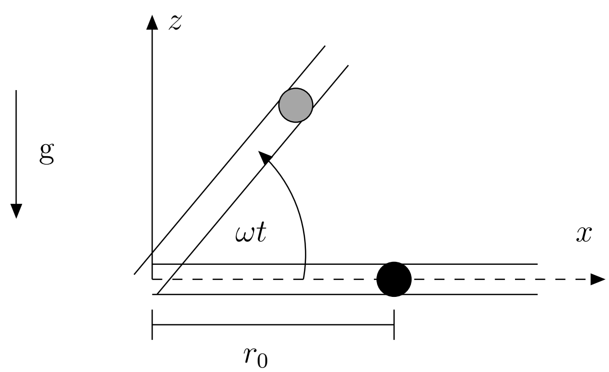
   Ein Massenpunkt mit konstanter Masse m bewegt sich im Potential $V(r) = ar$ mit $a > 0$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   (a) Begründen Sie, dass es sich um eine ebene Bewegung handelt. Stellen Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten auf. Bestimmen Sie die zyklische Koordinate und die zugehörige Erhaltungsgröße p_I. Welche physikalische Bedeutung hat p_I?

   (b) Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf und ermitteln Sie das effektive Potential V_{eff}.

   (c) Rechnen Sie nach, dass die Lagrange- und die Hamiltonschen Gleichungen auf dieselben Bewegungsgleichungen führen. Die Gleichungen sollen *nicht* gelöst werden.

5. **Kugel im Rohr**



   Wir betrachten ein Rohr, in dem sich bei $r(t = 0) = r_0$ eine Kugel der Masse m befindet (siehe Skizze). Das Rohr dreht sich nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der (x, z)-Ebene, so dass auf die Kugel neben der Zwangskraft noch die Schwerkraft wirkt.

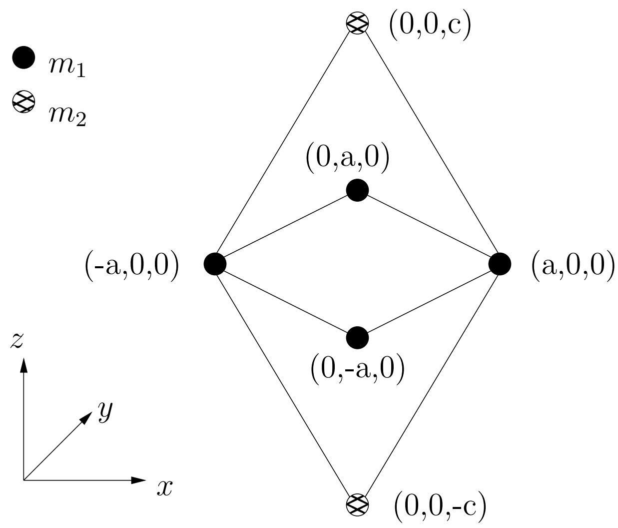
   (a) Stellen sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung mit LII auf.

   (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $r(t = 0) = r_0$ und $\dot{r}(t = 0) = 0$. Als Ansatz zum Auffinden der inhomogenen Lösung der DGL könnten sie $r_i(t) = C \sin(\omega \mathrm{t})$ verwenden.

   (c) Ab welcher Grenzfrequenz ω_c dominiert die Schwerkraft so über die Zentrifugalkraft, dass sich die Kugel nach einer halben Drehung des Rohres ($\omega t = \pi$) im Ursprung befindet? Diskutieren Sie auch das Verhalten der Kugel für große Zeiten bei $\omega > \omega_c$.

6. **Trägheitstensor**

Gegeben seien die in der Skizze gezeigten Massenpunkte.



(a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor in Bezug auf den Mittelpunkt des Objekts.

(b) Geben Sie das Trägheitsmoment bei Rotation um eine Seitenkante zwischen den Massen m_1 und m_2 an. Sie benötigen dazu auch den Satz von Steiner.

(c) Welche Drehachsen, die durch mindestens einen Punkt des Objektes gehen, hätten ein noch größeres Trägheitsmoment? Geben Sie ein Beispiel an und begründen Sie (keine Rechnung).