6 Bilanz - Gleichungen

6.1 Bilanz der elektromagnetischen Energie

Durchflutungs- und Induktionsgesetz werden in folgender Weise miteinander kombiniert:

$$\left.\begin{aligned} \underline{E} \cdot \operatorname{rot} \underline{H} &= \underline{E} \cdot \partial_t \underline{D} + \underline{E} \cdot \underline{j} \\ \underline{H} \cdot \operatorname{rot} \underline{E} &= -\underline{H} \partial_t \underline{B} \end{aligned}\right\} \quad -$$

Das ergibt

$$\underbrace{\underline{E} \cdot \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{H} \cdot \operatorname{rot} \underline{E}}_{=\operatorname{div}(\underline{H} \times \underline{E})} = \underline{E} \partial_t \underline{D} + \underline{H} \partial_t \underline{B} + \underline{E} \cdot \underline{j} \quad . \tag{II.36}$$

Die Größe

$$\underline{\Pi} = \underline{E} \times \underline{H}$$

heißt **Poynting-Vektor**. Sie hat den Charakter einer Energiestromdichte.

Folglich ergibt sich zunächst

$$\operatorname{div} \underline{\Pi} + \underline{E} \partial_t \underline{D} + \underline{H} \partial_t \underline{B} + \underline{E} \cdot \underline{j} = 0 \quad . \tag{II.37}$$

Die weitere Umformung dieser Gleichung wird unter der Annahme eines elektrisch wie magnetisch linearen Mediums gemacht; außerdem seien die Materialtensoren zeitunabhängig und symmetrisch. Diese Annahmen sind in verlustfreien Medien erfüllt. Dann gilt

$$\underline{E} \partial_t \underline{D} = \underline{E} \cdot \partial_t (\underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) = \tfrac{1}{2} \partial_t (\underline{E} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) = \tfrac{1}{2} \partial_t (\underline{E} \cdot \underline{D}) \quad , \tag{II.38}$$

$$\begin{aligned} \text{da} \quad \tfrac{1}{2} \partial_t (\underline{E} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) &= \tfrac{1}{2} (\partial_t \underline{E}) \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E} + \tfrac{1}{2} \underline{E} \partial_t (\underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) \\ &= \tfrac{1}{2} \underline{E} \partial_t (\underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) + \tfrac{1}{2} \underline{E} \partial_t (\underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) \\ &= \underline{E} \partial_t (\underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) \quad , \end{aligned}$$

sowie

$$\underline{H} \partial_t \underline{B} = \frac{1}{2} \partial_t (\underline{H} \cdot \underline{B}) \quad . \tag{II.39}$$

Wir führen mittels

$$u = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{H} \cdot \underline{B}) \tag{II.40}$$

die **elektromagnetische Energiedichte** ein und vermittels

$$L^{(\text{Joule})} = \underline{E} \cdot \underline{j} \tag{II.41}$$

die **Joulesche Verlustleistungsdichte**. Dann kann (II.37) zusammengefaßt werden zu

$$\partial_t u + \operatorname{div} \underline{\Pi} = -L^{(\text{Joule})} \qquad \text{(Poyntingscher Satz).} \tag{II.42}$$

Diese Beziehung beschreibt die lokale Energiebilanz. Daraus folgt die globale Energiebilanz durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf ein Volumen V:

$$d_t \int\limits_V u \, dV + \int\limits_V \operatorname{div} \underline{\Pi} \, dV = - \int\limits_V L^{(\text{Joule})} \, dV \quad .$$

Die Größe

$$U = \int\limits_V u \, dV$$

ist die Gesamtenergie im Volumen V. Es folgt

$$d_t U + \oint_S \underline{\Pi} \cdot d\underline{S} = - \int_V L^{(\text{Joule})} \, dV \quad . \tag{II.43}$$

Die Gesamtenergie in V ändert sich durch den Energiefluß $\oint \underline{\Pi} \cdot d\underline{S}$ durch die Oberfläche S von V und durch die Jouleschen Verluste im Volumen V. Innerhalb der Jouleschen Verluste wird elektromagnetische Energie in eine andere Energieform (Teilchenenergie, Wärme etc.) umgewandelt.

In Medien, die nicht durch eine lineare Materialgleichung beschrieben werden, treten im Poyntingschen Satz Zusatzterme auf, z.B. aufgrund

- remanenter Magnetisierungen und Hysterese in ferromagnetischen Materialien
- nichtlinearer Polarisationen in nichtlinear-optischen Medien

6.2 Bilanz des elektromagnetischen Impulses

Durchflutungs- und Induktionsgesetz werden in folgender Weise miteinander kombiniert:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\, \underline{H} \times \underline{B} &= \partial_t \underline{D} \times \underline{B} + \underline{j} \times \underline{B} \\ \underline{D} \times \text{rot}\, \underline{E} &= -\underline{D} \times \partial_t \underline{B} \end{aligned}\right\} \quad -$$

Das ergibt

$$\underline{D} \times \text{rot}\, \underline{E} - \text{rot}\, \underline{H} \times \underline{B} = -\underline{D} \times \partial_t \underline{B} - \partial_t \underline{D} \times \underline{B} - \underline{j} \times \underline{B} \tag{II.44}$$

$$= -\partial_t (\underline{D} \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B}. \tag{II.45}$$

Die Größe

$$\underline{p} := \underline{D} \times \underline{B}$$

heißt **elektromagnetische Impulsdichte**. Man verifiziert die aus der Mechanik bekannte Maßeinheit für eine Impulsdichte:

$$[\,\underline{p}\,] = [\,\underline{D}\,][\,\underline{B}\,] = [\,\varepsilon_0\,][\,\underline{E}\,][\,\underline{B}\,] = \frac{As}{Vm}\,\frac{V}{m}\,\frac{Vs}{m^2} = \frac{VAs^2}{m^4} = \frac{Nms}{m^4} = \frac{Ns}{m^3}. \tag{II.46}$$

Somit ergibt sich zunächst

$$\partial_t \underline{p} + \underline{D} \times \text{rot}\, \underline{E} - \text{rot}\, \underline{H} \times \underline{B} = -\underline{j} \times \underline{B}. \tag{II.47}$$

Da mittlerweile die Struktur von Bilanzgleichungen schon gut vertraut ist, liegt es nahe nach Umformungen zu suchen, die die rot enthaltenden Terme in eine Divergenz überführen. Um die Rechnung überschaubar zu halten, wollen wir nur recht einfache Materialgleichungen betrachten:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E} \quad , \quad \underline{H} = \kappa_0 \underline{\underline{\kappa}}\, \underline{B} \qquad \text{(lineare Medien)} \tag{II.48}$$

$$\text{mit} \qquad \partial_{x_a} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \quad , \quad \partial_{x_a} \underline{\underline{\kappa}} = 0 \qquad \text{(homogene Materialien)} \tag{II.49}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T \quad , \quad \underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\kappa}}^T \qquad \text{(symmetrische Materialtensoren)} \tag{II.50}$$

Dann folgt nach der unten angegebenen Nebenrechnung

$$\underline{D} \times \text{rot}\, \underline{E} = \partial_{x_c} (\tfrac{1}{2} \underline{D}\, \underline{E}\, \delta_{ac} - D_c E_a) + E_a \, div \underline{D} \tag{II.51}$$

$$-\text{rot}\, \underline{H} \times \underline{B} = \partial_{x_c} (\tfrac{1}{2} \underline{H}\, \underline{B}\, \delta_{ac} - H_a B_c) + H_a \, div \underline{B} \tag{II.52}$$

$$\tag{II.53}$$

Die in diesem Term enthaltene Größe

$$\underline{\underline{\Sigma}} := \underline{E} \circ \underline{D} + \underline{H} \circ \underline{B} - \tfrac{1}{2}(\underline{E}\,\underline{D} + \underline{H}\,\underline{B})\underline{\underline{1}} = \underline{E} \circ \underline{D} + \underline{H} \circ \underline{B} - u\,\underline{\underline{1}} \tag{II.54}$$

in Komponentenschreibweise

$$\Sigma_{ab} = E_a D_b + H_a B_b - u\delta_{ab} \tag{II.55}$$

heißt **Maxwellscher Spannungstensor**. Für die Medien mit vorausgesetzten symmetrischen Materialtensoren ist der Spannungstensor ein symmetrischer Tensor:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T \qquad \text{bzw.} \qquad \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba} \tag{II.56}$$

Im Abschnitt 12 greifen wir den Maxwellschen Spannungstensor wieder auf und betrachten eine Darstellung, die auch für nichtsymmetrische Materialtensoren gilt.
Hier benutzen wir den Spannungstensor, um die Impuls - Flußdichte $\underline{\underline{\widetilde{\Sigma}}}$ als negativen Maxwellschen Spannungstensor zu definieren:

$$\underline{\underline{\widetilde{\Sigma}}} = -\underline{\underline{\Sigma}}. \tag{II.57}$$

Man verifiziere die aus der Mechanik bekannte Maßeinheit für eine Impuls - Flußdichte:

$$\left[\underline{\underline{\widetilde{\Sigma}}}\right] = [\underline{D}][\underline{E}] = [\varepsilon_0][\underline{E}]^2 = \frac{As}{Vm}\frac{V^2}{m^2} = \frac{VAs}{m^3} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{Ns}{m^3}\frac{m}{s} = \frac{Ns}{m^2 s} \tag{II.58}$$

Setzen wir die Impuls - Flußdichte in die Bilanzgleichung ein und ersetzen die Divergenz - Terme entsprechend der Maxwellgleichungen, so folgt

$$\partial_t p_a + \partial_{x_c}\widetilde{\Sigma}_{ac} = -\varrho E_a - (\underline{j} \times \underline{B})_a \tag{II.59}$$

Der Term

$$k_a^L = \varrho E_a + (\underline{j} \times \underline{B})_a \tag{II.60}$$

ist die Lorentz - Kraftdichte. Wir werden sie in Aschnitt 12 noch genauer untersuchen.

Wenn man die a-Komponente von $\widetilde{\Sigma}_{ca}$ als Vektor auffaßt, dann ist

$$\partial_c \widetilde{\Sigma}_{ca} \tag{II.61}$$

gerade die Divergenz dieses Vektors und die Impuls - Bilanz hat die erwartete bekannte Form einer Bilanz - Gleichung.
Zur Interpretation der Impuls - Bilanz lassen wir die Impuls - Flußdichte zunächst außer acht; z.B. mögen alle Felder räumlich homogen sein. Schreiben wir:

$$\Delta\underline{p} = -(\varrho\underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})\Delta t, \tag{II.62}$$

so liegt die Interpretation auf der Hand. Links steht die Veränderung der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes und rechts die negative Veränderung der Impulsdichte, die von allen Ladungen und Strömungen getragen wird. Die Summe aus beiden bleibt konstant. Wird die Impuls-Flußdichte mit in die Betrachtung einbezogen, so beschreibt dieser Term das mögliche Zu- oder Abfließen von Impuls.

Nebenrechnung:

$$\bullet \quad \left[\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E} \times \operatorname{rot}\underline{E}\right]_a = \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bd}\,E_d\,\varepsilon_{cef}\,\partial_{x_e}E_f \tag{II.63}$$
$$\text{mit} \quad \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{cef} = \delta_{ae}\,\delta_{bf} - \delta_{af}\,\delta_{be} \tag{II.64}$$
$$= (\delta_{ae}\,\delta_{bf} - \delta_{af}\,\delta_{be})\,\varepsilon_{bd}\,E_d\,\partial x_e E_f \tag{II.65}$$
$$= \varepsilon_{bd}\,E_d\,\partial_{x_a}E_b \;-\; \varepsilon_{bd}\,E_d\,\partial_{x_b}E_a \tag{II.66}$$
$$= \partial_{x_a}(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{bd}\,E_b\,E_d) - \varepsilon_{cd}\,E_d\,\partial_{x_c}E_a \tag{II.67}$$
$$= \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{bd}\,E_b\,E_d\,\delta_{ac} - \varepsilon_{cd}\,E_d\,E_a) + \varepsilon_{cd}\,E_a\,\partial_{x_c}E_d \tag{II.68}$$
$$\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E} \times \operatorname{rot}\underline{E}\right]_a = \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{bd}\,E_b\,E_d\,\delta_{ac} - \varepsilon_{cd}\,E_d\,E_a) + E_a\,\partial_{x_c}(\varepsilon_{cd}\,E_d) \tag{II.69}$$
$$[\underline{D} \times \operatorname{rot}\underline{E}]_a = \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\underline{D}\,\underline{E}\,\delta_{ac} - D_c\,E_a) + E_a\,\partial_{x_c}D_c \tag{II.70}$$
$$\tag{II.71}$$
$$\bullet \quad \left[\operatorname{rot}\underline{\underline{\kappa}}\,\underline{B} \times \underline{B}\right]_a = \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bde}(\partial_{x_d}\kappa_{ef}\,B_f)B_c = \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bde}\,\kappa_{ef}\,B_c\partial_{x_d}B_f \tag{II.72}$$
$$\text{mit} \quad \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bde} = -(\delta_{ad}\,\delta_{ce} - \delta_{ae}\,\delta_{cd}) \tag{II.73}$$
$$= -(\delta_{ad}\,\delta_{ce} - \delta_{ae}\,\delta_{cd})\kappa_{ef}\,B_c\partial_{x_d}B_f \tag{II.74}$$
$$= -\left\{\kappa_{cf}B_c\,\partial_{x_a}B_f - \kappa_{af}\,B_c\,\partial_{x_c}B_f\right\} \tag{II.75}$$
$$= -\left\{\partial_{x_a}(\tfrac{1}{2}\,\kappa_{bd}\,B_b\,B_d) - \kappa_{ad}\,B_c\,\partial_{x_c}B_d\right\} \tag{II.76}$$
$$= -\left\{\partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\kappa_{bd}\,B_b\,B_d\,\delta_{ac} - \kappa_{ad}\,B_c\,B_d) + \kappa_{ad}\,B_d\,\partial_{x_c}B_c\right\} \tag{II.77}$$
$$\left[\operatorname{rot}\underline{\underline{\kappa}}\,\underline{B} \times \underline{B}\right]_a = -\left\{\partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\kappa_{bd}\,B_b\,B_d\,\delta_{ac} - \kappa_{ad}\,B_d\,B_c) + \kappa_{ad}\,B_d\,\partial_{x_c}B_c\right\} \tag{II.78}$$
$$[\operatorname{rot}\underline{H} \times \underline{B}]_a = -\left\{\partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\underline{H}\,\underline{B}\,\delta_{ac} - H_a\,B_c) + H_a\,\partial_{x_c}B_c\right\} \tag{II.79}$$

6.3 Bilanz des elektromagnetischen Drehimpulses

Aus der Bilanz des Impulses kann die Bilanzgleichung für den elektromagnetischen Drehimpuls gewonnen werden. In Analogie zur Mechanik wird die elektromagnetische Drehimpulsdichte definiert als:

$$\underline{L} := \underline{x} \times \underline{p}, \tag{II.80}$$

in Komponentenschreibweise

$$L_a := \varepsilon_{abc}\,x_b\,p_c \tag{II.81}$$

$\underline{p}$ ist die im vorhergehendem Abschnitt eingeführte elektromagnetische Impulsdichte.
Die Impuls - Bilanz

$$\partial_t p_a + \partial_{x_c}\widetilde{\Sigma}_{ca} = -k_a^L \tag{II.82}$$

wird vektoriell mit dem Ortsvektor multipliziert. Es folgt

$$\varepsilon_{abc}\,x_b\,\partial_t p_c + \varepsilon_{abc}\,x_b\partial_{x_d}\,\widetilde{\Sigma}_{dc} = -\varepsilon_{abc}\,x_b\,k_c^L. \tag{II.83}$$

Nun gilt

$$\varepsilon_{abc}\,x_b\,\partial_t p_c = \partial_t(\varepsilon_{abc}\,x_b\,p_c), \tag{II.84}$$

da t und x_b unabhängig sind. Man verwechsele x_b nicht mit der Ortskoordinate eines bewegten Teilchens, für die sehr wohl $\partial_t x_b \neq 0$ gilt. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abc}\, x_b\, \partial_{x_d} \widetilde{\Sigma}_{dc} &= \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}) - \varepsilon_{abc}\, \widetilde{\Sigma}_{dc}\, \partial_{x_d} x_b && \text{(II.85)}\\ &= \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}) - \varepsilon_{abc}\, \widetilde{\Sigma}_{dc}\, \delta_{bd} && \text{(II.86)}\\ &= \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}) - \varepsilon_{abc}\, \widetilde{\Sigma}_{bc}. && \text{(II.87)}\end{aligned}$$

Der Term ganz rechts verschwindet, da für jeden Index a die verbleibende Konstruktion eine Spur aus einem symmetrischen Tensor ($\Sigma_{bc} = \Sigma_{cb}$) und einem antisymmetrischen Tensor ($\varepsilon_{abc} = -\varepsilon_{acb}$) darstellt und verschwindet. Da wir von der Impuls - Bilanz im vorhergehenden Abschnitt ausgegangen sind, übertragen sich natürlich auch die Einschränkungen an die Materialgleichungen auf den jetzigen Abschnitt. Insbesondere ist hier die Impuls - Flußdichte ebenfalls symmetrisch. Somit verbleibt

$$\varepsilon_{abc}\, x_b\, \partial_{x_d} \widetilde{\Sigma}_{dc} = \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}). \tag{II.88}$$

Eingeführt werden nun über

$$T_{da} := \varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc} \tag{II.89}$$

der Tensor der Drehimpuls - Flußdichte und über

$$l_a := \varepsilon_{abc}\, x_b\, k_c^L \tag{II.90}$$

die Drehmomentendichte der Lorentz - Kraft. Damit schreibt sich die Drehimpuls - Bilanz als

$$\partial_t L_a + \partial_{x_c} T_{ca} = -l_a, \tag{II.91}$$

in der wir die bekannte Form einer Bilanzgleichung wiedererkennen.

7 Elektromagnetische Potentiale

Durch die Einführung elektromagnetischer Potentiale ist das homogene Maxwell-System (II.3) und (II.4) leicht zu befriedigen. Die Gleichung

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0$$

wird befriedigt durch Einführung des Vektorpotentials $\underline{A}$ über

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \quad . \tag{II.92}$$

Das Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \underline{E} + \partial_t \underline{B} = \operatorname{rot}(\underline{E} + \partial_t \underline{A}) = 0$$

wird befriedigt durch Einführung des skalaren Potentials Φ über

$$\underline{E} + \partial_t \underline{A} = -\operatorname{grad} \Phi \quad . \tag{II.93}$$

Das „$-$“ wird in Analogie zur Mechanik eingefügt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \operatorname{rot} \underline{A} && \text{(II.94)}\\ \underline{E} &= -\partial_t \underline{A} - \operatorname{grad} \Phi && \text{(II.95)}\end{aligned}$$

und die homogenen Maxwell-Gleichungen für beliebige Potentiale $\underline{A}$ und Φ sind gelöst.

Wir behalten die Bezeichnungen $\underline{A}$ und Φ, die bereits in Kapitel I eingeführt wurden, bei. Jetzt ist aber zu beachten, daß die Maßsystemkonstanten ε_0 und μ_0 den Potentialen eine physikalische Dimension verleihen.

$\underline{E}$ und $\underline{B}$ ausgedrückt durch die Potentiale $\underline{A}$ und Φ werden nun in das inhomogene Maxwell-System (II.1) und (II.2) eingesetzt. Dazu sind die Materialgleichungen festzulegen. Wir betrachten