9 Retardierte und avancierte Potentiale

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten Grundgleichungen aufgestellt und umgeformt wurden, sollen einige nun gelöst werden.

Vorausgesetzt sei ein homogenes isotropes Medium mit Strom- und Ladungsquellen. Für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes verwenden wir die Potentiale $\underline{A}$ und Φ. Wir eichen die Potentiale durch die Lorentz-Bedingung

$$\operatorname{div}\underline{A} + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t\Phi = 0 \quad . \tag{II.136}$$

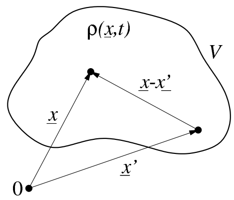
Dann gilt

$$\Delta\underline{A} - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\underline{j} \tag{II.137}$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\varrho \quad . \tag{II.138}$$

Es handelt sich hier um lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, speziell um Wellengleichungen. Die allgemeine Lösung linearer Differentialgleichungen setzt sich zusammen als Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Problems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems. Die in der allgemeinen Lösung des homogenen Problems enthaltenen Freiheitsgrade werden genutzt, um die Lösung an mögliche vorgegebene Rand- und Anfangswerte anzupassen.

Wir wollen hier keine speziellen Ränder betrachten, sondern den unendlichen Raum, in dem sich inselartige Strom- und Ladungsquellen befinden. Von Interesse ist dann nur die Lösung der inhomogenen Gleichungen. Für Φ gilt:



$$\Phi(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_V \frac{\varrho\left(\underline{x}', t \mp \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \quad . \tag{II.139}$$

Dieses Ergebnis beweist man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung.

Bemerkung: Für $c_{\mathrm{Ph}} \to \infty$ gelangt man formal zum stationären Grenzfall. Die Wellengleichung geht dann über in die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\varrho$$

mit der Lösung

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_V \frac{\varrho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \quad .$$

Diese Situation wurde bereits in Kapitel I besprochen.

Offensichtlich existieren zwei Lösungen, die sich in der Quellzeit um ein Vorzeichen unterscheiden. Die Lösung mit dem Zeitargument

$$t_R = t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}} \qquad \text{(retardierte Zeit)} \tag{II.140}$$

beschreibt das retardierte Potential, die mit

$$t_A = t + \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}} \qquad \text{(avancierte Zeit)} \tag{II.141}$$

das avancierte Potential. Das die beiden Lösungen auftreten müssen, ist klar, da die Wellengleichung invariant gegenüber der Transformation $c_{\mathrm{Ph}} \to -c_{\mathrm{Ph}}$ ist.

Wir diskutieren nun die beiden Lösungen. Wir betrachten das retardierte Potential zur Zeit t am Ort $\underline{x}$, $\Phi(\underline{x}, t)$. Dieser Potentialwert wird nun durch die möglichen Quellstärken ϱ an den verschiedenen Orten $\underline{x}'$ zu den Zeiten t_R bestimmt. Da aber stets $t_R \leq t$ gilt, wird das Potential zur Zeit t von Quellstärken zur gleichen Zeit oder von vorherigen Quellstärken festgelegt. Die Kausalität ist gewahrt.

Das avancierte Potential zur Zeit t wird jedoch von Quellereignissen zur Zeit t_A beeinflußt; wegen $t_A \geq t$ ist hier die Kausalität nicht gewahrt: Zukünftige Ursachen zeigen gegenwärtige Wirkungen. Diese Lösung muß offensichtlich ausgeschlossen werden. Diese zusätzliche Maßnahme über die Einführung der Maxwell-Gleichungen hinaus, legt den Schluß nahe, daß die Maxwellsche Theorie keine abgeschlossene Theorie darstellen kann.

Für $\underline{A}$ gilt völlig analog

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int\limits_V \frac{\underline{j}\left(\underline{x}', t \mp \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} dV' \tag{II.142}$$

sowie auch die vorangegangene Diskussion.

Achtung: Φ und $\underline{A}$ mit den obigen Darstellungen erfüllen die entsprechenden Wellengleichungen. Zu prüfen ist jedoch auch die Erfüllung der Eichgleichung!

Es soll also die Eichgleichung (II.136) überprüft werden. Einsetzen der retardierten Potentiale $\underline{A}$ und Φ (avancierte Potentiale analog) ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int\limits_V \operatorname{div} \frac{\underline{j}\left(\underline{x}', t \mp \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} dV' + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int\limits_V \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \partial_t \varrho \left(\underline{x}', t \mp \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right) dV' \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \int \left(\operatorname{div} \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_t \varrho(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \right) dV' \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{wobei} \quad t_R = t_R(t, \underline{x}, \underline{x}') \quad .
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} &= \underline{j}(\underline{x}', t_R) \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_{t_R} \underline{j}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \cdot \operatorname{grad} t_R \\
&= -\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \cdot \underline{j}(\underline{x}', t_R) - \partial_{t_R} \underline{j} \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}} \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2} \quad .
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}' \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} &= \underline{j}(\underline{x}', t_R) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\operatorname{div}' \underline{j}(\underline{x}', t_R)\big|_{t_R} + \partial_{t_R} \underline{j} \cdot \operatorname{grad}' t_R}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \\
&= \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \underline{j}(\underline{x}', t_R) + \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \left(\operatorname{div}' \underline{j}(\underline{x}', t_R)\Big|_{t_R} + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}} \partial_{t_R} \underline{j}(\underline{x}', t_R) \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \right) \quad .
\end{aligned}$$

Damit kann man schreiben

$$\operatorname{div} \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \operatorname{div}' \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{\operatorname{div}' \underline{j}(\underline{x}', t_R)\big|_{t_R}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{II.143}$$

Dieser Ausdruck wird im Integranden der Eichgleichung genutzt und es folgt

$$\int \left(-\operatorname{div}' \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\operatorname{div}' \underline{j}(\underline{x}', t_R)\big|_{t_R}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_t \varrho(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \right) dV' = 0 \quad .$$

Der zweite und dritte Term bilden die Ladungsbilanz

$$\operatorname{div}' \underline{j}(\underline{x}', t_R)\big|_{t_R} + \partial_t \varrho(\underline{x}', t_R) = \operatorname{div}' \underline{j}(\underline{x}', t_R) + \partial_t \varrho(\underline{x}', t_R) = 0$$

und heben sich heraus. Den verbleibenden ersten Term formen wir mittels des Gaußschen Satzes um zu

$$\int\limits_V \operatorname{div}' \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} dV' = \oint\limits_S \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{S} \quad .$$

Die Oberfläche S liegt im Unendlichen, wo die inselartige Stromquelle $\underline{j}$ verschwindet. Somit verschwindet der gesamte Term und die Eichgleichung (II.136) ist erfüllt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch die Darstellung der retardierten und avancierten Potentiale mit Hilfe der s.g. Greenschen Funktion erfolgen. Wir beschränken uns o.B.d.A. auf die retardierten Potentiale, denn mit $c_{Ph} \to -c_{Ph}$ gelangt man zu den avancierten Potentialen.
Die retardierte Greensche Funktion der elektromagnetischen Wellengleichung ist durch

$$G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') = \begin{cases} \frac{\delta(t - t' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}})}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} & \text{für} \quad t > t' \\ 0 & \text{für} \quad t < t' \end{cases} \tag{II.144}$$

definiert. Damit lassen sich die retardierten Potentiale darstellen in der Form:

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x}, t) &= \mu_0 \mu \int dV' \int dt' G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') \, \underline{j}(\underline{x}', t') \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int dt' G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') \, \varrho(\underline{x}', t') \quad . \end{aligned} \tag{II.145}$$

Zum Beweis setzen wir die Greensche Funktion ein und führen die Zeitintegration aus. Für das skalare Potential folgt dann

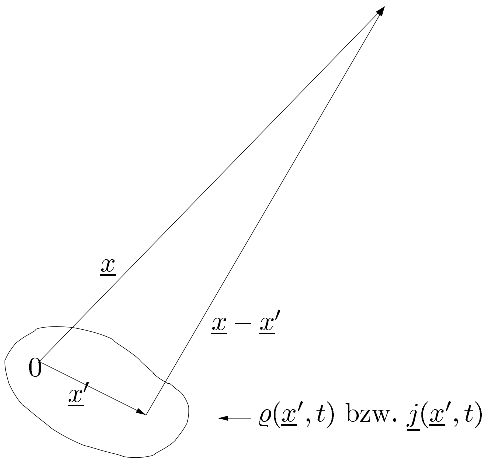
$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}})}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \, \varrho(\underline{x}', t') \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int\limits_{t}^{\infty} dt' \quad 0 \quad \varrho(\underline{x}', t') \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{\varrho(\underline{x}', t')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \, \delta(t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}} - t') \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \, \frac{\varrho(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}})}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \end{aligned} \tag{II.146}$$

Die Beweisführung für das Vektorpotential ist natürlich analog.

q.e.d.

10 Multipol- Entwicklung

Die retardierten Potentiale sollen nun ausgewertet werden für große Entfernungen von inselartigen Quellen.



Es gilt also

$$\frac{|\underline{x}'|}{|\underline{x}|} << 1$$

und Taylor - Entwicklungen nach $\underline{x}'$ sind somit naheliegend. Im Fernfeld ($|\underline{x}| >> |\underline{x}'|$) liefern bereits die Terme niedriger Ordnungen präzise Darstellungen.
Physikalisch ist auch klar, daß für große Entfernungen des Aufpunktes von der Quelle, eine sehr spezielle Mikrokonfiguration der Quellfunktionen ϱ und $\underline{j}$ nicht entscheidend sind, sondern die Potentiale durch globale Parameter der Quellfunktionen bestimmt werden. Folgende globalen Quellparameter werden innerhalb dieses Abschnitts definiert:

- Gesamtladung $Q := \int dV' \varrho(\underline{x}', t)$
- Elektrisches Dipolmoment $\underline{p}(t) := \int dV'\, \underline{x}'\, \varrho(\underline{x}', t)$
- Magnetisches Dipolmoment $\underline{m}(t) := \frac{1}{2} \int dV'\, \underline{x}' \times \underline{j}(\underline{x}', t)$

Außerdem wollen wir aus praktischen Gründen folgende Abkürzungen verwenden:

- $r := |\underline{x}|$
- $v := c_{Ph}$

Die betrachteten Materialien seien wiederum linear, homogen, isotrop, relaxationsfrei und remanenzfrei. Die weitere Mühe besteht nun in der Taylorentwicklung der Potentiale

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x}, t) &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int dV' \frac{\underline{j}(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v})}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int dV' \frac{\varrho(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v})}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \quad . \end{aligned} \tag{II.147}$$

Wir betrachten zunächst die Funktion:

$$f(\underline{x}') \equiv f(x_1', x_2', x_3') := |\underline{x} - \underline{x}'| = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \tag{II.148}$$

und entwickeln bei $\underline{x}' = 0$ bis zur ersten Ordnung in x_1', x_2', x_3'. Es folgt

$$\begin{aligned}
f(x_1', x_2', x_3') &= f(0,0,0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1'}\right|_0 x_1' + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right|_0 x_2' + \left.\frac{\partial f}{\partial x_3'}\right|_0 x_3' + ... \\
|\underline{x} - \underline{x}'| &= r - \frac{x_1}{r}x_1' - \frac{x_2}{r}x_2' - \frac{x_3}{r}x_3' + ... \\
|\underline{x} - \underline{x}'| &= r - \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r} + ... \\
\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} &= \frac{1}{r(1 - \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r^2} + ...)} = \frac{1}{r}(1 + \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r^2} + ...) \\
\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} &= \frac{1}{r} + \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r^3} + ...
\end{aligned} \tag{II.149}$$

Nun werden die Quellen in folgender Weise entwickelt:

$$\begin{aligned}
\varrho(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v}) &= \varrho(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \varrho(\underline{x}', t - \frac{r}{v})}{\partial t_R} \left.\operatorname{grad}' t_R\right|_0 \underline{x}' + ... \\
\underline{j}(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v}) &= \underline{j}(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \underline{j}(\underline{x}', t - \frac{r}{v})}{\partial t_R} \left.\operatorname{grad}' t_R\right|_0 \underline{x}' + ...
\end{aligned} \tag{II.150}$$

wobei die retardierte Zeit des vorigen Abschnitts übernommen wurde:

$$t_R = t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v} \qquad .$$

Nun gilt

$$\left.\operatorname{grad}' t_R\right|_0 = \frac{\underline{x}}{rv}$$

und statt $\frac{\partial}{\partial t_R}$ schreiben wir einfach $\frac{\partial}{\partial t}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varrho(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v}) &= \varrho(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \varrho(\underline{x}', t - \frac{r}{v})}{\partial t} \frac{\underline{x} \cdot \underline{x}'}{rv} + ... \\
\underline{j}(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{v}) &= \underline{j}(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \underline{j}(\underline{x}', t - \frac{r}{v})}{\partial t} \frac{\underline{x} \cdot \underline{x}'}{rv} + ...
\end{aligned} \tag{II.151}$$

Für das skalare Potential ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int dV' \left\{ \varrho(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \varrho(\underline{x}', t - \frac{r}{v})}{\partial t} \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{rv} + ... \right\} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r^3} + ... \right\} \\
\phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left\{ \frac{1}{r} \int dV' \varrho(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + \left(\frac{\underline{x}}{r^3} + \frac{\underline{x}}{rv}\frac{\partial}{\partial t} \right) \int dV' \underline{x}'\, \varrho(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) + ... \right\} \\
\phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left\{ \frac{Q}{r} + \left(\frac{\underline{x}}{r^3} + \frac{\underline{x}}{r^2 v}\frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{p}(t - \tfrac{r}{v}) + ... \right\} \\
\phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\underline{x}\,\dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{v})}{r^2 v} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\underline{x}\,\underline{p}(t - \frac{r}{v})}{r^3} + ...
\end{aligned} \tag{II.152}$$

Der erste Term entspricht dem Potential einer Punktladung Q; er fällt mit $\frac{1}{r}$ im Fernfeld ab. Der zweite Term ist ein typischer dynamischer Dipolbeitrag, der ebenfalls mit $\frac{1}{r}$ abfällt; man beachte$|\underline{x}| = r$. Der dritte Term tritt auch bei einem statischen Dipol auf; er fällt mit $\frac{1}{r^2}$ schneller ab als die beiden ersten Terme.

Für das Vektorpotential ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int dV'\left\{\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})+\frac{\partial \underline{j}(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t}\frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{rv}+...\right\}\left\{\frac{1}{r}+\frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{r^3}+...\right\} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\int dV'\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})+\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^2v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\int dV'\,\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})(\underline{x}\,\underline{x}')+...\right\} \end{aligned} \tag{II.153}$$

Die Terme können weiter umgeformt werden. Für die Umformung des erstens Terms gehen wir vom elektrischen Dipolmoment

$$\underline{p}(t)=\int dV'\,\underline{x}'\,\varrho(\underline{x}',t) \tag{II.154}$$

aus. Zeitliche Differentiation ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}(t) &= \int dV'\,\underline{x}'\,\dot{\varrho}(\underline{x}',t) \\ \dot{\underline{p}}(t) &= -\int dV'\,\underline{x}'\operatorname{div}'\underline{j}(\underline{x}',t) \\ \dot{p_a}(t) &= -\int dV'\,x'_a\,\partial_{x'_b}j_b(\underline{x}',t) \\ \dot{p_a}(t) &= -\int dV'\,\partial_{x'_b}(x'_a\,j_b)+\int dV'j_b(\underline{x}',t)\delta_{ab} \\ \dot{p_a}(t) &= -\int d\underline{S}'\,x'_a\,\underline{j}(\underline{x}',t)+\int dV'j_a(\underline{x}',t) \\ \dot{p_a}(t) &= \int dV'j_a(\underline{x}',t) \qquad , \end{aligned} \tag{II.155}$$

da für inselartige Quellen die Stromdichte auf einer Oberfläche S' jenseits der Insel verschwindet und mit ihr das Oberflächenintegral. Somit verbleibt für den ersten Term

$$\dot{\underline{p}}(t-\tfrac{r}{v})=\int dV'\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) \qquad . \tag{II.156}$$

Für den zweiten Term gehen wir vom magnetischen Dipolmoment

$$\underline{m}(t)=\tfrac{1}{2}\int dV'\,\underline{x}'\times\underline{j}(\underline{x}',t) \tag{II.157}$$

aus. Vektorielle Multiplikation mit $\underline{x}$ ergibt

$$\begin{aligned} \underline{m}(t)\times\underline{x} &= \tfrac{1}{2}\int dV'\,\left(\underline{x}'\times\underline{j}(\underline{x}',t)\right)\times\underline{x} \\ \underline{m}(t)\times\underline{x} &= \tfrac{1}{2}\int dV'\underline{x}\times\left(\underline{j}(\underline{x}',t)\times\underline{x}'\right) \\ \underline{m}(t)\times\underline{x} &= \tfrac{1}{2}\int dV'\,\left\{\underline{j}(\underline{x}',t)(\underline{x}\,\underline{x}')-\underline{x}'(\underline{x}\,\underline{j}(\underline{x}',t))\right\} \end{aligned} \tag{II.158}$$

Der äußerste rechte Term ist weiter in Komponentenschreibweise umzuformen:

$$\begin{aligned} &\int dV'x'_a\,x_b\,j_b(\underline{x}',t)=x_b\int dV'x'_a\delta_{bc}\,j_c(\underline{x}',t) \\ &= x_b\int dV'x'_a\,\frac{\partial x'_b}{\partial x'_c}\,j_c(\underline{x}',t)=-x_b\int dV'x'_b\,\frac{\partial\,(x'_a\,j_c(\underline{x}',t))}{\partial x'_c} \\ &= -x_b\int dV'x'_b\,\frac{\partial x'_a}{\partial x'_c}\,j_c(\underline{x}',t)-x_b\int dV'x'_b\,x'_a\,\frac{j_c(\underline{x}',t)}{\partial x'_c} \\ &= -x_b\int dV'x'_b\,j_a(\underline{x}',t)+x_b\int dV'x'_a\,x'_b\dot{\varrho} \qquad . \end{aligned} \tag{II.159}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\underline{m}(t) \times \underline{x} = {} & \tfrac{1}{2} \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\,\underline{x}') \\
& + \tfrac{1}{2} \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\,\underline{x}') \\
& - \tfrac{1}{2} \int dV' \, \dot{\varrho}(\underline{x}', t)\, \underline{x}' \, (\underline{x}\,\underline{x}') \\
\underline{m}(t) \times \underline{x} = {} & \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\,\underline{x}') \\
& - \tfrac{1}{2} \int dV' \, \dot{\varrho}(\underline{x}', t)\, \underline{x}' \, (\underline{x}\,\underline{x}') \qquad .
\end{aligned} \tag{II.160}$$

So lautet der gesuchte zweite Term im Vektorpotential

$$\begin{aligned}
& \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v})(\underline{x}\,\underline{x}') \\
& = \underline{m}(t - \tfrac{r}{v}) \times \underline{x} + \tfrac{1}{2} \int dV' \, \dot{\varrho}(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v})\, \underline{x}' \, (\underline{x}\,\underline{x}') \qquad .
\end{aligned} \tag{II.161}$$

Der äußerst rechte Ausdruck ist aber von 2. Ordnung in $\underline{x}'$, so daß wir ihn in unserer Betrachtung bis zur 1. Ordnung in $\underline{x}'$ weglassen können. Es verbleibt

$$\begin{aligned}
\underline{A}(\underline{x}, t) = {} & \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{1}{r} \underline{\dot{p}}(t - \tfrac{r}{v}) \\
& + \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2 v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{m}(t - \tfrac{r}{v}) \times \underline{x} + \ldots \\
\underline{A}(\underline{x}, t) = {} & \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\underline{\dot{p}}(t - \frac{r}{v})}{r} + \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\underline{\dot{m}}(t - \frac{r}{v}) \times \underline{x}}{r^2 v} + \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\underline{m}(t - \frac{r}{v}) \times \underline{x}}{r^3} + \ldots
\end{aligned} \tag{II.162}$$

Um die äußerlich symmetrische Form der Multipol- Entwicklung des skalaren und des Vektorpotentials zu verdeutlichen,stellen wir beide Gleichungen noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{x}, t) = {} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\underline{\dot{p}}(t - \frac{r}{v})\, \underline{x}}{r^2 v} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\underline{p}(t - \frac{r}{v})\, \underline{x}}{r^3} + \ldots \\
\underline{A}(\underline{x}, t) = {} & \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\underline{\dot{p}}(t - \frac{r}{v})}{r} + \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\underline{\dot{m}}(t - \frac{r}{v}) \times \underline{x}}{r^2 v} + \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\underline{m}(t - \frac{r}{v}) \times \underline{x}}{r^3} + \ldots
\end{aligned} \tag{II.163}$$

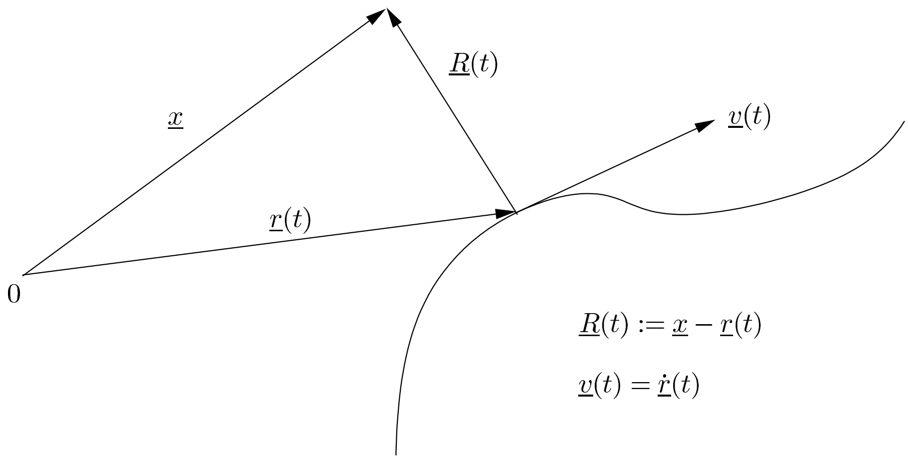
Spezialisierungen auf konkrete Quellfunktionen sind nun leicht möglich, ebenso wie der Fernfeldberechnung von $\underline{E}$ und $\underline{B}$.

Wenn die Taylor - Entwicklung weiter als bis zur 1. Ordnung in $\underline{x}'$ vorgenommen wird, erscheinen auch höhere Momente als Monopol und Dipole, nämlich

- Quadrupole
- Oktupole
- etc.

11 Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung

Wir betrachten eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ entlang einer Bahnkurve $\underline{r}(t)$ im Vakuum bewegt.



Letztendlich soll für dieses Standardproblem die Abstrahlung elektromagnetischer Energie untersucht werden. Dazu sind folgende Schritte auszuführen:

- Berechnung der retardierten Potentiale $\underline{A}, \phi$
- Berechnung der elm. Felder $\underline{E}, \underline{B}$
- Berechnung des Poynting- Vektors
- Berechnung der Intensität der Energieabstrahlung in den Raum

11.1 Lienard- Wiechert- Potentiale

Die mit der bewegten Ladung verbundene Ladungs- und Stromdichte läßt sich leicht konstruieren:

$$\begin{aligned} \varrho(\underline{x}', t) &= q\,\delta(\underline{x}' - \underline{r}(t)) \\ \underline{j}(\underline{x}', t) &= \varrho(\underline{x}', t)\,\underline{v}(t) = q\,\underline{v}(t)\,\delta(\underline{x}' - \underline{r}(t)) \end{aligned} \tag{II.164}$$

Zunächst überzeugen wir uns von der Erfüllung der Ladungsbilanz. Mit der Abkürzung

$$\underline{y}(t) := \underline{x}' - \underline{r}(t) \tag{II.165}$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho(\underline{x}', t) &= q\,\partial_t\,\delta(\underline{y}(t)) \\ &= q\,\partial_{y_a}\,\delta(\underline{y}(t)) \cdot \dot{y}_a \\ &= -\,q\,\partial_{y_a}\,\delta(\underline{y}(t))\,v_a(t) \\ &= -\,\partial_{y_a}\,q\,v_a\,\delta(\underline{y}(t)) \\ &= -\,\partial_{x'_b}\,\{q\,v_a(t)\,\delta(\underline{x}' - \underline{r}(t))\}\,\frac{\partial x'_b}{\partial y_a} \\ &= -\,\partial_{x'_b}\,j_a(\underline{x}', t)\,\delta_{ba} \\ &= -\,\mathrm{div}'\,\underline{j}(\underline{x}', t) \qquad . \end{aligned} \tag{II.166}$$

Zur Berechnung der retardierten Potentiale gehen wir von deren Darstellung mit Hilfe der Greenschen Funktion aus, also

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) =& \frac{1}{\varepsilon_0}\int dV' \int dt' G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')\, \varrho(\underline{x}',t') \\ \underline{A}(\underline{x},t) =& \mu_0 \int dV' \int dt' G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')\, \underline{j}(\underline{x}',t') \qquad .\end{aligned} \tag{II.167}$$

Einsetzen der Quellen und Greenschen Funktion liefert

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \int_{-\infty}^{t} dt'\, \frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, q\,\delta(\underline{x}'-\underline{r}(t')) \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \int_{-\infty}^{t} dt'\, \frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, q\underline{v}(t')\,\delta(\underline{x}'-\underline{r}(t'))\end{aligned} \tag{II.168}$$

Integration über das Quellvolumen ergibt

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{t} dt'\, \frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{c})}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{q\,\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} dt'\, \frac{\underline{v}(t')\,\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{c})}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}\end{aligned} \tag{II.169}$$

Die dt' - Integration läßt sich nicht unmittelbar ausführen, da der t' - Wert, für den das Argument der δ - Funktion verschwindet, i.a. nicht explizit angebbar ist. Es folgen die Substitutionen

$$\begin{aligned}\underline{R}(t') :=& \underline{x}-\underline{r}(t') \\ R(t') :=& |\underline{R}(t')| = |\underline{x}-\underline{r}(t')| \\ \xi :=& t'-t+\frac{R(t')}{c}\end{aligned} \tag{II.170}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt'} =& 1+\frac{1}{c}\,\frac{dR(t')}{dt'} \\ \frac{dR(t')}{dt'} =& \frac{d|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{dt'} \\ =& \operatorname{grad}|\underline{x}-\underline{r}(t')|\,(-\underline{v}(t')) \\ =& -\underline{v}(t')\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|} \\ \frac{dR(t')}{dt'} =& -\underline{v}(t')\,\frac{\underline{R}(t')}{R(t')} \\ \frac{d\xi}{dt'} =& 1-\frac{\underline{v}(t')}{c}\,\frac{\underline{R}(t')}{R(t')} \\ \frac{dt'}{|\underline{x}-\underline{r}(t)|} =& \frac{dt'}{R(t')} = \frac{d\xi}{R(t')-\frac{\underline{v}(t')\underline{R}(t')}{c}} \qquad .\end{aligned} \tag{II.171}$$

Damit nehmen die Potentiale die Form

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\xi \frac{\delta(\xi)}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{q\,\mu_0}{4\pi}\int d\xi \frac{\underline{v}(t')\,\delta(\xi)}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\end{aligned} \tag{II.172}$$

und somit

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\right]_{ret} \qquad ; \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{q\,\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\underline{v}(t')}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\right]_{ret} = \frac{\underline{v}(t')}{c^2}\,\phi(\underline{x},t) \end{aligned} \tag{II.173}$$

an. Das Symbol $[...]_{ret}$ markiert, daß t' aus $\xi = 0 = t' - t + \frac{R(t')}{c}$ auszurechnen und in der prinzipiellen Form

$$t' = t'(\underline{x},t) \tag{II.174}$$

einzusetzen ist. Explizit läßt sich t' nur für einfache Bewegungsprobleme angeben.
Die o.a. Potentiale heißen auch ***Lienard - Wiechert - Potentiale.***

11.2 Feldberechnung aus den Lienard - Wiechert - Potentialen

Ausgangspunkt sind die Lienard - Wiechert - Potentiale in der Form

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\underline{v}(t')}{c^2}\,\phi(\underline{x},t) \\ &\text{mit} \\ t' &= t'(\underline{x},t) \\ &\text{aus} \\ t-t' &= \frac{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{c} = \frac{1}{c}|R(t')| = \frac{1}{c}R(t') \end{aligned} \tag{II.175}$$

Für die Feldberechnung

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\,\mathrm{grad}\,\phi - \partial_t\underline{A} \\ \underline{B} &= \mathrm{rot}\,\underline{A} \end{aligned} \tag{II.176}$$

sind $\underline{A}$ und ϕ nach $\underline{x}$ und t zu differenzieren, die explizit von $\underline{x}$ und implizit über t' von $\underline{x}$ und t abhängen. Demnach werden die Ausdrücke $\frac{\partial t'}{\partial t}$ und $\mathrm{grad}\,t'$ benötigt. Diese Rechnung führen wir im Detail vor; sie ist eine perfekte Übung für implizites Differenzieren und die Anwendung der Kettenregel. Aus

$$t - t'(\underline{x},t) = \frac{1}{c}\,|\underline{x}-\underline{r}(t'(\underline{x},t))| \tag{II.177}$$

folgt nach Anwendung von $\frac{\partial}{\partial t}$ zunächst

$$1 - \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t'}|\underline{x}-\underline{r}(t')|\,\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad . \tag{II.178}$$

Wir substituieren

$$\underline{R} = \underline{x}-\underline{r}(t') \qquad , \qquad R = |\underline{R}| \tag{II.179}$$

und berechnen den rechten Term separat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'}R &= \frac{\partial}{\partial R_a}R\cdot\frac{\partial R_a}{\partial t'} \\ &= \frac{R_a}{R}\left(-\frac{\partial r_a(t')}{\partial t'}\right) \\ &= -\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}\,\underline{v}(t') \qquad . \end{aligned} \tag{II.180}$$

Somit folgt

$$1-\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}\cdot\underline{v}(t')\,\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{II.181}$$

und daraus

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\underline{v}(t')}{c}\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}}=\frac{R}{R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}} \tag{II.182}$$

Die Gradientenbildung von t' ergibt

$$-\operatorname{grad} t'(\underline{x},t)=\frac{1}{c}\operatorname{grad}|\underline{x}-\underline{r}(t'(\underline{x},t))|=\frac{1}{c}\operatorname{grad} R \tag{II.183}$$

Für die Brechnung des rechten Terms benutzen wir wiederum die obige R - Substitution und schreiben in Komponenten

$$\partial_{x_a}R=\partial_{R_b}R\,\frac{\partial R_b}{\partial x_a}=\frac{R_b}{R}\,\frac{\partial R_b}{\partial x_a}\qquad. \tag{II.184}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_b}{\partial x_a}=&\frac{\partial x_b}{\partial x_a}-\frac{\partial r_b(t'(\underline{x},t))}{\partial x_a}\\ =&\delta_{ba}-\frac{\partial r_b}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x_a}\\ =&\delta_{ba}-v_b(t')\,\frac{\partial t'}{\partial x_a}\end{aligned} \tag{II.185}$$

und somit

$$\begin{aligned}\partial x_a R=&\frac{R_b}{R}\left(\delta_{ba}-v_b\,\frac{\partial t'}{\partial x_a}\right)\\ \partial x_a R=&\frac{R_a}{R}-\frac{v_b\,R_b}{R}\,\frac{\partial t'}{\partial x_a}\\ \operatorname{grad} R=&\frac{\underline{R}}{R}-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{R}\operatorname{grad} t'\qquad.\end{aligned} \tag{II.186}$$

Für $\operatorname{grad} t'$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}-\operatorname{grad} t'=&\frac{1}{c\,R}\left(\underline{R}-\underline{v}\,\underline{R}\operatorname{grad} t'\right)\\ \operatorname{grad} t'=&\frac{\underline{R}}{c\,R}\,\frac{1}{\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c\,R}-1}\\ \operatorname{grad} t'=&-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{R}}{R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}\qquad.\end{aligned} \tag{II.187}$$

Für die spätere Anwendung stellen wir noch eine weitere Beziehung bereit:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} t'+\frac{\underline{v}}{c^2}\,\frac{\partial t'}{\partial t}=&-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{R}}{R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}+\frac{\underline{v}}{c^2}\,\frac{R}{R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}\\ =&-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\,\underline{v}}{R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}\qquad.\end{aligned} \tag{II.188}$$

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wie die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$. Ausgangspunkt ist

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}\\ \underline{A} &= \frac{\underline{v}}{c^2}\,\phi\\ \text{mit}\\ \underline{R}(t') &= \underline{x} - \underline{r}(t')\\ R(t') &= |\underline{R}(t')| = |\underline{x} - \underline{r}(t')|\\ \text{und}\\ t' &= t'(\underline{x}, t)\\ \text{implizit gegeben durch}\\ t - t' &= \frac{1}{c}\,R(t') \qquad .\end{aligned} \tag{II.189}$$

Zur Berechnung von $\underline{E}$ stellen wir $\operatorname{grad}\phi$ und $\partial_t \underline{A}$ bereit. Der Gradient setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Zum einen durch Differentiation bei festgehaltenem t' und zum anderen durch Differentiation nach dem in t' enthaltenem $\underline{x}$. Dann folgt

$$\operatorname{grad}\phi = \operatorname{grad}\phi\Big|_{t'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\operatorname{grad} t' \qquad . \tag{II.190}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi\Big|_{t'} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}\Bigg|_{t'}\\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\operatorname{grad}\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\Big|_{t'}}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2}\\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{\underline{R}}{R} - \frac{\underline{v}}{c}}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2}\\ \operatorname{grad}\phi\Big|_{t'} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\,\frac{\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2} \qquad .\end{aligned} \tag{II.191}$$

Weiterhin berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t'} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial t'}\,\frac{1}{R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}}\\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{\partial}{\partial t'}\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2}\\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2}\left(\frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{\underline{R}}{c}\,\frac{\partial\underline{v}}{\partial t'} - \frac{\underline{v}}{c}\,\frac{\partial\underline{R}}{\partial t'}\right)\\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2}\left(\frac{\underline{R}}{R}(-\frac{\partial\underline{r}}{\partial t'}) - \frac{\underline{R}\,\dot{\underline{v}}}{c} - \frac{\underline{v}}{c}(-\frac{\partial\underline{r}}{\partial t'})\right)\\ \frac{\partial\phi}{\partial t'} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(R - \frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2}\left(\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{R} + \frac{\dot{\underline{v}}\,\underline{R}}{c} - \frac{v^2}{c}\right) \qquad .\end{aligned} \tag{II.192}$$

Die zeitliche Ableitung des Vektorpotentials liefert

$$
\begin{aligned}
\partial_t \underline{A} &= \frac{1}{c^2}\partial_t\left(\underline{v}(t')\,\phi(x,t)\right)\\
&= \frac{1}{c^2}\partial_{t'}\left(\underline{v}(t')\,\phi(x,t)\right)\,\frac{\partial t'}{\partial t}\\
\partial_t \underline{A} &= \frac{1}{c^2}\left(\dot{\underline{v}}\,\phi + \underline{v}\,\frac{\partial \phi}{\partial t'}\right)\,\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad .
\end{aligned}
\tag{II.193}
$$

Das elektrische Feld ergibt dann

$$
\begin{aligned}
\underline{E} &= -\operatorname{grad}\phi\Big|_{t'} - \frac{\partial \phi}{\partial t'}\operatorname{grad}t' - \frac{1}{c^2}\,\dot{\underline{v}}\,\phi\,\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\underline{v}}{c^2}\,\frac{\partial \phi}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial t}\\
\underline{E} &= -\operatorname{grad}\phi\Big|_{t'} - \frac{\partial \phi}{\partial t'}\left(\operatorname{grad}t' + \frac{\underline{v}}{c^2}\,\frac{\partial t'}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2}\,\dot{\underline{v}}\,\phi\,\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad .\\
\underline{E} &= +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\,\frac{\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^2}\\
&\quad - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{\underline{\underline{v\,R}}}{R} + \frac{\underline{\underline{\dot{v}\,R}}}{c} - \frac{v^2}{c}}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^2}\,\left(-\frac{1}{c}\right)\,\frac{\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}}{R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}}\\
&\quad - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{c^2}\,\dot{\underline{v}}\,\frac{1}{R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}}\,\frac{R}{R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}} \qquad .
\end{aligned}
\tag{II.194}
$$

Wir separieren die $\dot{v}$ - Terme und erhalten

$$
\begin{aligned}
\underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}\,\frac{\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^2} + \frac{1}{c}\,\frac{\left(\frac{\underline{\underline{v\,R}}}{R} - \frac{v^2}{c}\right)\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3}\right\}\\
&\quad + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{c^2}\,\frac{\left(\underline{\dot{v}}\,\underline{R}\right)\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\dot{\underline{v}}\,R}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^2}\right\}\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{1}{R}\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\underline{\underline{v\,R}}}{R} - \frac{v^2}{c}\right)\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3}\\
&\quad + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\left(\underline{\dot{v}}\,\underline{R}\right)\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right) - \dot{\underline{v}}\,R\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3}\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)\left(1 - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c\,R} + \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c\,R} - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3}\\
&\quad + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)\left(\underline{R}\,\dot{\underline{v}}\right) - \dot{\underline{v}}\left(\underline{R}\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3}\\
\underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3}\\
&\quad + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\underline{R}\times\left(\left(\underline{R} - \frac{R}{c}\,\underline{v}\right)\times\dot{\underline{v}}\right)}{\left(R - \frac{\underline{\underline{v\,R}}}{c}\right)^3} \qquad .
\end{aligned}
\tag{II.195}
$$

Dieser Ausdruck für $\underline{E}$ läßt sich i.a. nicht weiter vereinfachen.

Das magnetische Feld $\underline{B}$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \underline{B} =& \mathrm{rot}\,\underline{A} = \mathrm{rot}\left(\frac{\underline{v}(t')}{c^2}\,\phi(\underline{x},t)\right) \\ \underline{B} =& \frac{1}{c^2}\,\phi\,\mathrm{rot}\,\underline{v} + \frac{1}{c^2}\,\mathrm{grad}\,\phi\times\underline{v} \end{aligned} \tag{II.196}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{rot}\,\underline{v}(t')\right)_a =& \varepsilon_{abc}\,\partial_{x_b} v_c = \varepsilon_{abc}\frac{\partial v_c}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial x_b} \\ \mathrm{rot}\,\underline{v} =& \mathrm{grad}\,t'\times\underline{\dot{v}} \end{aligned} \tag{II.197}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{B} =& \frac{1}{c^2}\phi\,\mathrm{grad}\,t'\times\underline{\dot{v}} + \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{grad}\,\phi\Big|_{t'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\,\mathrm{grad}\,t'\right)\times\underline{v} \\ \underline{B} =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{c^3}\frac{\underline{R}\times\underline{\dot{v}}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2} + \frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{R}\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^2} - \frac{1}{c}\frac{\left(\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{R}+\frac{\underline{\dot{v}}\,\underline{R}}{c}-\frac{v^2}{c}\right)\underline{R}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\right]\times\underline{v}\right\} \quad . \end{aligned} \tag{II.198}$$

Wiederum separieren wir die $\underline{\dot{v}}$ - Terme und erhalten

$$\underline{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\left\{-\frac{\frac{1}{R}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{R}-\frac{v^2}{c}\right)\underline{R}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\times\underline{v} - \frac{\frac{1}{c}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}+\frac{\underline{\dot{v}}\,\underline{R}}{c^2}\underline{R}\times\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\right\} \quad . \tag{II.199}$$

Einarbeitung von $\underline{v}\times\underline{v}=0$ liefert

$$\begin{aligned} \underline{B} =& -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\frac{1}{R}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{R}-\frac{v^2}{c}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\,\underline{R}\times\underline{v} + \frac{\frac{1}{c}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}+\frac{1}{c^2}\left(\underline{\dot{v}}\,\underline{R}\right)\,\underline{R}+\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\right\} \\ \underline{B} =& -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\underline{R}\times\underline{v}+\frac{1}{c}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}+\frac{1}{c^2}\left(\underline{\dot{v}}\,\underline{R}\right)\underline{R}\times\underline{v}\right\} \end{aligned} \tag{II.200}$$

Diese Beziehung läßt sich kompakt darstellen in der Form

$$\underline{B} = \frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\underline{E} \qquad . \tag{II.201}$$

Zum Beweis setzen wir $\underline{E}$ ein und zeigen die Übereinstimmung. Zweckmäßigerweise betrachten wir die $\underline{\dot{v}}$ - abhängigen und $\underline{\dot{v}}$ - unabhängigen Terme getrennt. Für die entsprechenden Anteile ist dann folgendes nachzuweisen.
$\underline{\dot{v}}$ - unabhängige Terme:

$$\begin{aligned} -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\,\underline{R}\times\underline{v} =& \frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \\ -\frac{1}{c^2}\,\underline{R}\times\underline{v} =& \frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\,\underline{v}\right) = -\frac{1}{c^2}\,\underline{R}\times\underline{v} \qquad \square \end{aligned} \tag{II.202}$$

$\underline{\dot{v}}$ - abhängige Terme:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\frac{1}{c}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}+\frac{\underline{\dot{v}}\,\underline{R}}{c^2}\,\underline{R}\times\underline{v}\right\}\\
&\qquad=\frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\underline{\dot{v}}\right]\right\}\\
-\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}-\frac{\underline{\dot{v}}\,\underline{R}}{c}\,\underline{R}\times\underline{v}&=\frac{1}{R}\underline{R}\times\left\{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)(\underline{R}\,\underline{\dot{v}})-\underline{\dot{v}}\left[\underline{R}\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\right]\right\}\\
&=-\frac{\underline{R}\times\underline{v}}{c}\left(\underline{R}\,\underline{\dot{v}}\right)-\underline{R}\times\underline{\dot{v}}\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)\qquad\square
\end{aligned}
\tag{II.203}
$$

Damit ist die $\underline{B}$ - Darstellung bestätigt.
Wir fassen die elektromagnetischen Felder einer beliebig bewegten Punktladung zusammen:

$$
\begin{aligned}
\underline{E}(\underline{x},t)&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\underline{\dot{v}}\right]\right\}\\
\underline{B}(\underline{x},t)&=\frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\underline{E}\qquad,\\
&\text{wobei}\quad \underline{R}=\underline{R}(t')=\underline{x}-\underline{r}(t')\quad,\quad R=R(t')=|\underline{R}|\quad,\quad \underline{v}=\underline{v}(t')\quad,\\
&\text{und}\quad t'=t'(\underline{x},t)\quad\text{ist als Lösung von}\\
&\qquad t'=t-\frac{R(t')}{c}\\
&\text{einzusetzen.}
\end{aligned}
\tag{II.204}
$$

Die Feldkonfiguration wird nun diskutiert.

- $\underline{E}\perp\underline{B}$
- Das elektromagnetische Feld besteht aus einem rein geschindigkeitsabhängigem Term und einem Term, der die Beschleunigung des Teilchens enthält.
- Der rein geschwindigkeitsabhängige Term ist proportional $1/R^2$, der $\underline{\dot{v}}$ - Term ist proportional $1/R$ und dominiert daher das Fernfeld.
- Betrachtung der Nahzone

$$
\begin{aligned}
\underline{E}&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\\
\underline{B}&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{R}\times\underline{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3}\qquad.
\end{aligned}
\tag{II.205}
$$

Für $v << c$ folgt

$$
\begin{aligned}
\underline{E}&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{R}}{R^3}\\
\underline{B}&=\frac{q\,\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{v}\times\underline{R}}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{J}\times\underline{R}}{R^3}\qquad.
\end{aligned}
\tag{II.206}
$$

Das elektrische Feld geht in das einer elektrostatischen Punktladung über; Retardierungseffekte sind wegen $R/c << t-t'$ vernachlässigt, woraus $t'\approx t$ folgt. Das magnetische Feld gehorcht *dem Biot - Savart - Gesetz*, das in späteren Kapiteln noch besprochen wird.

- Betrachtung der Fernzone

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\underline{\dot{v}}\right]}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3} \\ \underline{B} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^3}\frac{1}{R}\frac{\underline{R}\times\left\{\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\underline{\dot{v}}\right]\right\}}{\left(R-\frac{\underline{v}\,\underline{R}}{c}\right)^3} \end{aligned} \tag{II.207}$$

Für $v << c$ folgt

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{R}\times(\underline{R}\times\underline{\dot{v}})}{c^2\,R^2} \\ \underline{B} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{\dot{v}}\times\underline{R}}{c^3\,R^2} \end{aligned} \tag{II.208}$$

Es ist zu sehen, daß im Fernfeld für $v << c$

$$\begin{aligned} \underline{E}\cdot\underline{B} &= 0 \\ \underline{E}\cdot\underline{R} &= 0 \\ \underline{B}\cdot\underline{R} &= 0 \qquad . \end{aligned} \tag{II.209}$$

11.3 Berechnung des Poynting - Vektors

Wir schränken die Diskussion auf $v << c$ ein und berechnen die Nahzone und Fernzone getrennt.

- Nahzone

$$\begin{aligned} \underline{\Pi} &= \underline{E}\times\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{E}\times\underline{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{R}\times(\underline{v}\times\underline{R})}{R^6} \\ \underline{\Pi} &= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{R^6}\left\{\underline{v}\,R^2-\underline{R}\,(\underline{v}\,\underline{R})\right\} \end{aligned} \tag{II.210}$$

- Fernzone

$$\begin{aligned} \underline{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^5}\frac{[\underline{R}\times(\underline{R}\times\underline{\dot{v}})]\times(\underline{\dot{v}}\times\underline{R})}{R^5} \\ \underline{\Pi} &= \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\frac{\underline{R}\,(\underline{\dot{v}}\times\underline{R})^2}{R^5} \qquad , \end{aligned} \tag{II.211}$$

wobei benutzt wurde

$$\begin{aligned} a := \underline{\dot{v}}\times\underline{R} \quad &, \quad \underline{a}\,\underline{R} = 0 \quad , \\ [\underline{R}\times(\underline{R}\times\underline{\dot{v}})]\times(\underline{\dot{v}}\times\underline{R}) &= \underline{a}\times(\underline{R}\times\underline{a}) = \underline{R}a^2-\underline{a}\,(\underline{a}\,\underline{R}) \\ &= \underline{R}\,(\underline{\dot{v}}\times\underline{R})^2 \qquad . \end{aligned} \tag{II.212}$$

11.4 Abstrahlung

Der Poynting - Vektor ist bekanntlich die Energieflußdichte. Wir erinnern an die Maßeinheit

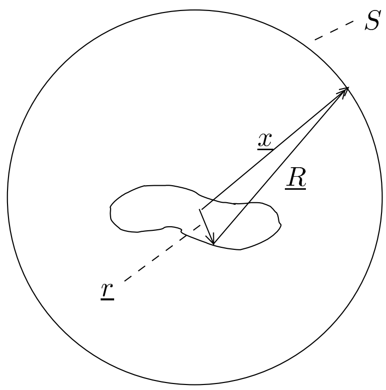
$$[\underline{\Pi}] = \frac{J}{m^2 s} \qquad . \tag{II.213}$$

Im vorangegangenem Abschnitt wurde berechnet, daß der Poynting - Vektor

- in der Nahzone Terme proportional $\underline{v}$ und proportional $\underline{R}$ und
- in der Fernzone Terme nur proportional $\underline{R}$

enthält. Wir berechnen nun den gesamten Energiefluß des elektromagnetischen Feldes, der von der bewegten Punktladung ausgeht. Dazu betrachten wir folgende Konfiguration.

- Die Bewegung der Punktladung sei zwar beliebig, aber auf ein endliches Gebiet beschränkt, also
$$|\underline{r}(t')| < l \qquad , \tag{II.214}$$
wobei l die Ausdehnung der Teilchenbewegung beschreibt. Der Koordinatenursprung 0 liege in dem Gebiet. Die Bewegung sei also z.B. elliptisch.
- Wir betrachten eine Kugelsphäre S um das endliche Bewegungsgebiet und <u>definieren</u> den Energiefluß I als Integral des Poynting - Vektors über die Kugelsphäre,
$$I(t) = \oint_S \Pi(\underline{x}, t) d\underline{S} \tag{II.215}$$
Der Energiefluß hat die Maßeinheit
$$[I] = [\Pi] \cdot [\underline{S}] = \frac{J}{m^2 s} \cdot m^2 = \frac{J}{s} = \frac{Ws}{s} = W \quad . \tag{II.216}$$
Der Energiefluß hat also die Maßeinheit einer Leistung. Er wird auch Intensität genannt.



- Aus dem vorhergehendem Abschnitt übernehmen wir die Näherung $v << c$.

Der Energiefluß soll nun durch eine große Kugelsphäre S berechnet werden, also
$$|\underline{x}| >> l > |\underline{r}(t')| \qquad , \tag{II.217}$$
bzw.
$$\underline{x} - \underline{r}(t') = \underline{R}(t') \approx \underline{x} \tag{II.218}$$
mit der Folge, daß
$$\begin{aligned} t - t' &= \frac{1}{c}|\underline{x} - \underline{r}(t')| \approx \frac{1}{c}|\underline{x}| \\ t' &= t - \frac{|\underline{x}|}{c} \quad . \end{aligned} \tag{II.219}$$

Wir wollen hier wieder die bereits im Abschnitt „Multipol - Entwicklung“ benutzte Abkürzung

$$|\underline{x}| = r \qquad \text{(II.220)}$$

verwenden; man beachte aber, daß hier $r \neq |\underline{r}(t')|$ ist. Dann ist die retardierte Zeit t' ebenso wie im Abschnitt „Multipol - Entwicklung“

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad . \qquad \text{(II.221)}$$

Wir berechnen zunächst den Energiefluß, der mit der Fernzonen - Lösung des Poynting - Vektors

$$\underline{\Pi}(t') = \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\frac{|\underline{\dot{v}}(t') \times \underline{R}(t')|^2}{R(t')^5}\underline{R}(t') \qquad \text{(II.222)}$$

einhergeht. Wegen $\underline{x} \approx \underline{R}$ und $r \approx R$ gilt

$$\begin{aligned} d\underline{S} =& r^2 sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi \, \underline{n} \quad , \\ \underline{n} =& \frac{\underline{x}}{r} = \frac{\underline{R}}{R} \quad , \\ d\underline{S} =& r^2 sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi \, R^2 \, \frac{\underline{R}}{R} \end{aligned} \qquad \text{(II.223)}$$

und damit

$$I = \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \frac{|\underline{\dot{v}} \times \underline{R}|^2}{R^2} \quad .$$

Für die ϑ - Integration ist es zweckmäßig, die Polarachse in $\underline{\dot{v}}$ - Richtung zu legen, denn dann wird

$$|\underline{\dot{v}} \times \underline{R}| = |\underline{\dot{v}}| R sin\vartheta \qquad \text{(II.224)}$$

und weiter

$$\begin{aligned} I =& \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\underline{\dot{v}}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta sin^3\vartheta}_{\frac{4}{3}} \\ I =& \frac{q^2\mu_0}{6\pi c}\underline{\dot{v}}^2 \quad . \end{aligned} \qquad \text{(II.225)}$$

Mit vollständigen Argumenten liest sich das Ergebnis

$$I(t) = \frac{q^2\mu_0}{6\pi c}\left\{\underline{\dot{v}}(t')\right\}^2 = \frac{q^2\mu_0}{6\pi c}\left\{\underline{\dot{v}}(t - \frac{r}{c})\right\}^2 \quad . \qquad \text{(II.226)}$$

Die Intensität der Strahlung ist damit abhängig vom Beschleunigungsquadrat der Teilchenbewegung. Sie ist unabhängig vom Abstand, außer daß die Intensität zur Aufpunktzeit t abhängt von der Beschleunigung des Teilchens zur retardierten Zeit $t - \frac{r}{c}$. $\frac{r}{c}$ ist gerade wieder die Signallaufzeit ziwschen Ursache und Wirkung (Beobachtung).
Die abgeleitete Beziehung ist eine der wichtigsten Formeln der Strahlungstheorie. Ihre Kernaussage ist: *Eine beschleunigte Ladung strahlt elektromagnetische Energie ab.*

Bisher haben wir nur die Fernzonen - Lösung des Poynting - Vektors betrachtet. Der entsprechende Ausdruck für den Nahzonen - Term verschwindet aber. Dies ist leicht zu sehen, denn es gilt

$$\underline{\Pi}\, d\underline{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{R^6}\left\{\underline{v}R^2 - \underline{R}\,(\underline{v}\,\underline{R})\right\} R^2 sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi \, \frac{\underline{R}}{R} \quad . \qquad \text{(II.227)}$$

Damit folgt

$$\left\{\underline{v}R^2 - \underline{R}\,(\underline{v}\,\underline{R})\right\}\underline{R} = (\underline{v}\,\underline{R})\,R^2 - R^2\,(\underline{v}\,\underline{R}) = 0 \quad . \qquad \text{(II.228)}$$

q.e.d.

Damit kann die obige Kernaussage noch straffer gefaßt werden: Eine Ladung strahlt genau dann elektromagnetische Energie ab, wenn sie beschleunigt wird.

11.5 Beispiele für strahlende Ladung

- Kreisbewegung
- Hertzscher Dipol

s. Übungsaufgaben.