

Institut für Theoretische Physik,
Institut für Geophysik und Extraterrestrische Physik
der Technischen Universität Braunschweig

INSTABILITÄTEN IM PLASMA

Skriptum zur Vorlesung

Prof. Dr. U. Motschmann

Prof. Dr. K.-H.- Glaßmeier



Braunschweig, 2011
Version 0.9

Inhaltsverzeichnis

I Gleichgewicht, Stabilität, Instabilität	5
II Stabilitätsanalyse einfacher dynamischer Systeme	7
1 Systeme mit einem Freiheitsgrad	7
2 Systeme mit zwei Freiheitsgraden	10
3 Verallgemeinerung auf Systeme mit n Freiheitsgraden	13
III Stabilitätsanalyse im Plasma	15
1 Maxwell-Boltzmann-Gleichungen und MHD-Gleichungen	15
2 Gleichgewicht von Plasmazuständen und stationäre Lösungen	16
2.1 Gleichgewicht im stoßfreien Plasma	17
2.2 Gleichgewicht im stößebehafteten Plasma	18
3 Stabilitätsuntersuchung mit Normalmoden-Analyse	20
3.1 Kinetische Plasma-Beschreibung	20
3.2 MHD-Beschreibung	20
IV Zur Klassifizierung von Plasma-Instabilitäten	23
1 Geschwindigkeitsraum-Instabilitäten (Mikro-Instabilitäten)	23
2 Ortsraum-Instabilitäten (Makro-Instabilitäten)	23
V Geschwindigkeitsraum-Instabilitäten (Mikro-Instabilitäten)	25
1 Beam-Plasma-Instabilität (Zwei-Strom-Instabilität)	25
2 Anisotropie-Instabilität	32
3 MHD-Instabilitäten	34
3.1 Mirror-Instabilität	36

3.2	Fire-Hose-Instabilität	36
4	Zusammenfassende Bemerkungen	37
VI	Ortsraum-Instabilitäten (Makroinstabilitäten)	39
1	Die Rayleigh-Taylor-Instabilität	39
2	Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität	41
3	Pinch-Instabilitäten	45
3.1	Der lineare Pinch	45
4	Tearing-Mode-Instabilitäten	51
VII	Instabilität nicht-linearer Wellen	53

KAPITEL I

Gleichgewicht, Stabilität, Instabilität

Den Begriffen „Stabilität“ und „Instabilität“ wollen wir uns zunächst intuitiv nähern. Gut ausgeprägt ist unser Alltagsverständnis für eine stabile Gesundheit, einen stabilen Finanzmarkt oder für eine stabile Wetterlage, wobei stabil jeweils auch durch instabil ersetzt werden könnte. Instabil wird ein Zustand oder eine Situation empfunden, wenn ein gewisser Referenzzustand gestört ist und die Störung mit der Zeit anwächst. Für das Anwachsen der Störung müssen Ressourcen verfügbar sein.

Um die Begriffe „Stabilität“ und „Instabilität“ wissenschaftlich schärfer zu fassen, wird der jeweilige Referenzzustand als Gleichgewichtszustand festgelegt, wobei im Gleichgewicht die Ableitungen der das Gleichgewicht beschreibenden Größen verschwinden. Stabilität bedeutet dann, dass der Zustand des Systems im Gleichgewicht verharrt. Instabil ist der Zustand des Systems, wenn er vom Gleichgewicht wegläuft.

Wie ordnet sich dann ein „stabiles Wachstum“ (z.B. stabiles Wirtschaftswachstum) in diesen Rahmen ein? Zunächst passen Stabilität und Wachstum aus physikalischer Sicht nicht gut zusammen, denn Stabilität bedeutet Verharren im Gleichgewicht und damit Verschwinden der Zeitableitungen der entsprechenden Größen. Wachstum beinhaltet offensichtlich das Nichtverschwinden gewisser zeitlicher Ableitungen. Im Alltag haben wir beim „stabilen Wachstum“ zwei Zeitskalen vor Augen. Stabilität meint dann, dass sich ein Gleichgewichtszustand nur auf einer langsamen Zeitskala ändert. Stabilität sollte physikalisch exakt als Quasi-Stabilität bezeichnet werden. Instabilität ist dann entsprechend das Weglaufen des Zustandes vom Gleichgewicht auf einer schnellen Zeitskala.

Stabilitätsanalyse einfacher dynamischer Systeme

Vorbereitend auf die Stabilitätsanalyse im Plasma werden zunächst einfache mechanische Systeme behandelt. Für mechanische Systeme sind die auftretenden Größen reine Zeit-Funktionen; der Ort oder andere Parameter erscheinen in der jeweiligen Variablen-Liste nicht. Beispiele sind:

- Position eines Körpers $x(t)$
- Fläche eines Ölteppichs $\sigma(t)$
- Wechselkurs USD/EUR = $u(t)$

Beim letzten Beispiel handelt es sich nicht tatsächlich um ein mechanisches Problem, allerdings kann $u(t)$ wie eine mechanische Größe behandelt werden.

Im vorliegenden Kapitel werden Systeme mit einem, zwei und schließlich n Freiheitsgraden untersucht. Mathematisch führt die Stabilitätsanalyse auf ein Eigenwert-Problem. Das Ziel ist die Klassifikation von Gleichgewichtszuständen und das Herausarbeiten von Stabilitätskriterien in einfachen (mechanischen) Systemen.

Die Idee dieses Kapitels ist dann auch die wesentliche Grundlage der Stabilitätsanalyse im Plasma.

1 Systeme mit einem Freiheitsgrad

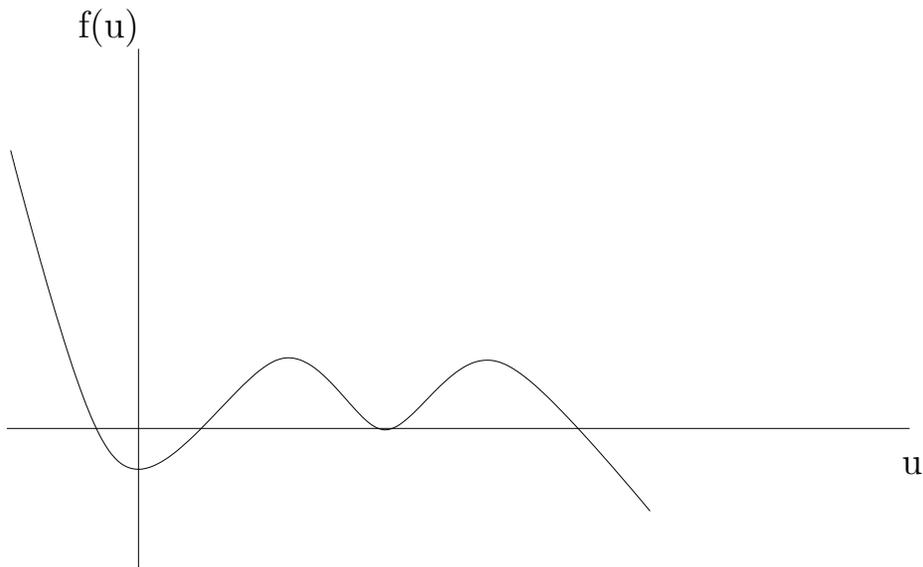
Beschreibung durch eine Variable $u \in \mathbb{R}^1$

$$d_t u = f(u); \tag{2.1}$$

$$u(t_0) = u_0 \tag{2.2}$$

Lösungen sind eindeutig \forall Anfangsbedingungen u_0

Beispiel:



- verallgemeinerte Kraft
- ggf Potential $V(u)$ einführen mit $f(u) = -\frac{\partial V}{\partial u}$.
- für 1-dimensionale Systeme (u Skalar) existiert immer ein Potential $V(u)$
- für mehrdimensionale Systeme (u Vektor) existiert ein Potential $V(u)$ nur unter bestimmten Bedingungen

Es werden nun die drei Begriffe Gleichgewicht, Stationarität und Stabilität definiert, die bereits im vorangehenden Kapitel erwähnt wurden.

- Definition von Gleichgewichtszuständen:
Das System befindet sich im Gleichgewicht, wenn für den Zustand des Systems

$$d_t u = 0 \quad (2.3)$$

gilt.

- Definition von stationären Zuständen:
Gleichgewichtszustände sind stationäre Zustände. Für stationäre Zustände u^0 gilt wegen Gleichung (2.1)

$$f(u^0) = 0 \quad (2.4)$$

Da f i.A. nichtlinear ist, sind ggf. mehrere stationäre Zustände $u_{(1)}^0, u_{(2)}^0, \dots, u_{(n)}^0$ möglich.

- Definition von stabilen Zuständen:
Ein stationärer Zustand u^0 ist stabil, wenn eine Störung δu dieses Zustandes mit der Zeit nicht anwächst. Andernfalls ist der stationäre Zustand u^0 instabil. Stabile stationäre Zustände heißen Attraktoren. Instabile stationäre Zustände heißen Repellenen.

Die Stabilität eines stationären Zustandes wird wie folgt untersucht:

$$u = u^0 + \delta u \quad (2.5)$$

$$\leadsto d_t \delta u = f(u^0 + \delta u) = \underbrace{f(u^0)}_{=0} + f'(u^0) \delta u + \underbrace{\frac{1}{2} f'' \delta u^2 + \dots}_{\text{klein}} \quad (2.6)$$

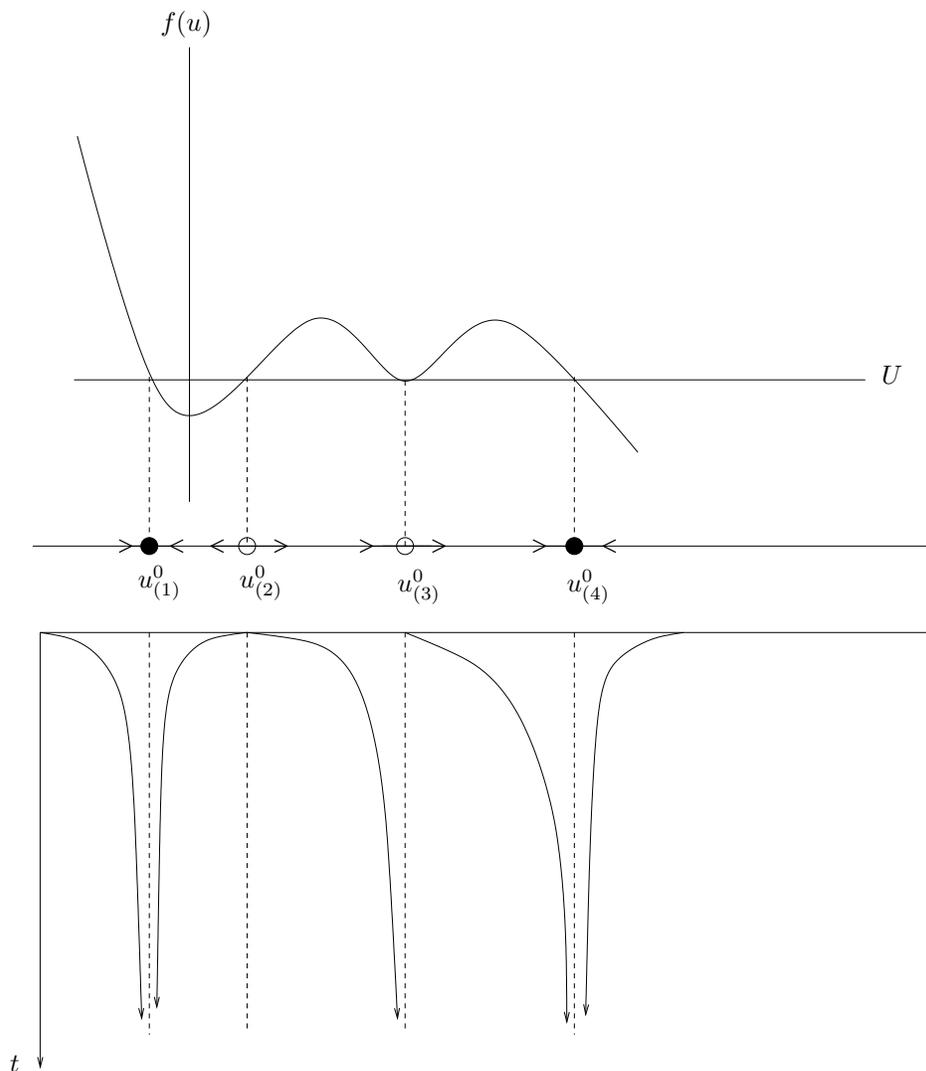
$$\leadsto d_t \delta u = f'(u^0) \delta u \quad (2.7)$$

$$\delta u \propto e^{f'(u^0) * t} \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Schlussfolgerungen:

1. $f'(u^0) < 0$ stabil (asymptotisch stabil)
2. $f'(u^0) > 0$ instabil
3. $f'(u^0) = 0$ grenzstabil; fordert genauere Untersuchung



Fazit:

- Im Zustandsdiagramm gibt es stabile stationäre Zustände = Attraktoren $(u_{(1)}^0, u_{(4)}^0)$.
- Fast der gesamte Zustandsraum ist Einzugsgebiet jeweils eines Attraktors, abgegrenzt durch instabile stationäre Zustände = Repellen $(u_{(2)}^0, u_{(3)}^0)$. Die Pfeile symbolisieren die Richtung der zeitlichen Entwicklung von $u(t)$.
- Es gibt keine Oszillationen.
- Es gibt Multistabilität $(u_{(1)}^0)$ und $u_{(4)}^0$.

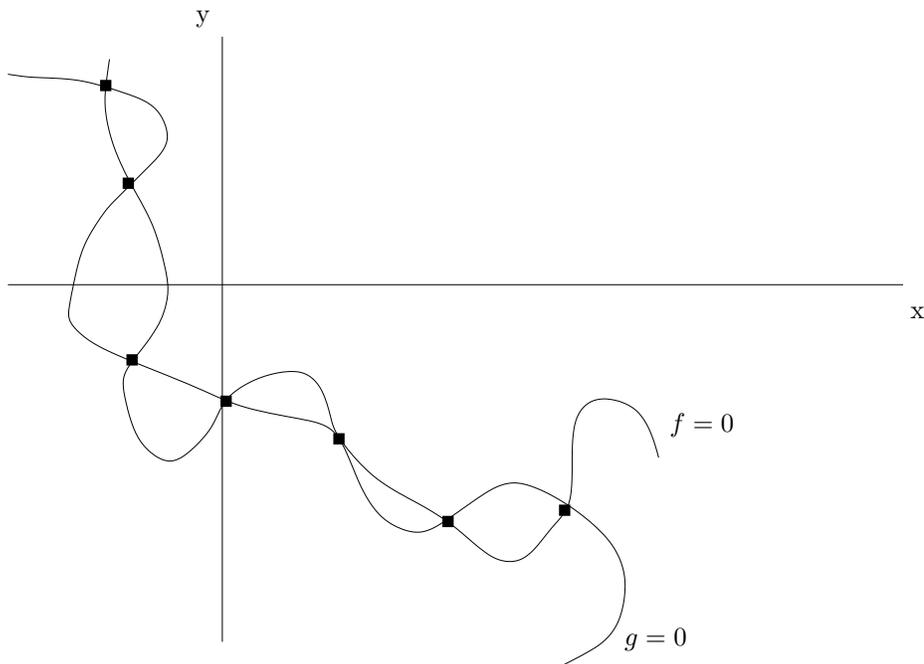
2 Systeme mit zwei Freiheitsgraden

Beschreibung durch Variablen-Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$d_t x = f(x, y) \quad (2.10)$$

$$d_t y = g(x, y) \quad (2.11)$$

- Stationarität/Gleichgewicht: $f(x^0, y^0) = g(x^0, y^0) = 0$



$\curvearrowright (x^0, y^0)_{(1), \dots, (7)}$

- Stabilität:

$$x = x^0 + \delta x \quad (2.12)$$

$$y = y^0 + \delta y \quad (2.13)$$

+ Linearisierung

$$d_t \delta x = A_{11} \delta x + A_{12} \delta y \quad (2.14)$$

$$d_t \delta y = A_{21} \delta x + A_{22} \delta y \quad (2.15)$$

bzw.

$$d_t \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

mit $A_{11} = \partial_x f(x^0, y^0)$ usw. reell

Ansatz:

$$\delta x = c_1 e^{pt} \quad (2.17)$$

$$\delta y = c_2 e^{pt} \quad (2.18)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{pt} \quad (2.19)$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

D.h. p ist Eigenwert von \underline{A} , $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor.

$$\det(\underline{A} - p\underline{I}) = 0 = \det \begin{pmatrix} A_{11} - p & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - p \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$p^2 - (A_{11} + A_{22})p + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = 0 \quad (2.22)$$

\curvearrowright Wurzeln sind Eigenwerte: p_1, p_2

\curvearrowright Zugehörige Eigenvektoren: $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$, $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$

\curvearrowright Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \underline{c}_1 e^{p_1 t} + \underline{c}_2 e^{p_2 t} \quad (2.23)$$

Wenn $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, wird Gleichung (2.23) direkt ausgewertet.

Wenn

$$p_1 = p_2^* =: p' + ip'' \quad (2.24)$$

$$\curvearrowright \underline{c}_1 = \underline{c}_2^* =: \underline{c}' + i\underline{c}'' \quad (2.25)$$

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = e^{p't} \{ \underline{c}' \cos(p''t) + \underline{c}'' \sin(p''t) \} \quad (2.26)$$

Nebenrechnung:

$$\underline{A}\underline{c}_1 = p_1 \underline{c}_1 = (p' + ip'')\underline{c}_1 \quad (2.27)$$

$$\underline{A}c_2 = p_2c_2 = (p' - ip'')c_2 \quad (2.28)$$

$$\curvearrowright c_2^* = c_1 \text{ für } \underline{A} \text{ reell} \quad (2.29)$$

und

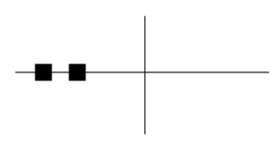
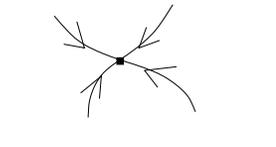
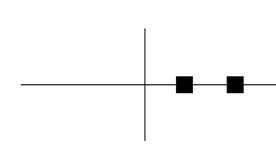
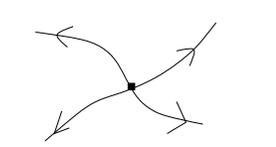
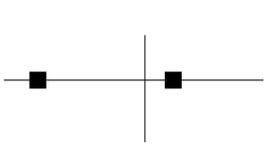
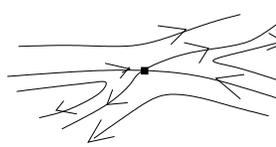
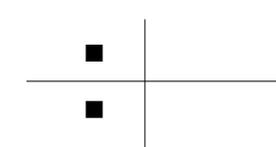
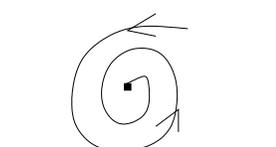
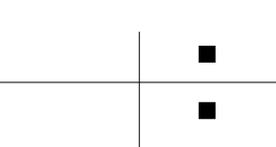
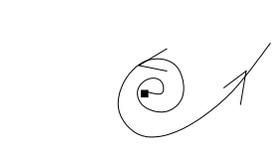
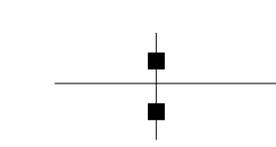
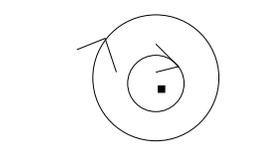
$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \underline{c}_1 e^{p_1 t} + \underline{c}_2 e^{p_2 t} \quad (2.30)$$

$$= e^{p''t} \{ (\underline{c}_1 + \underline{c}_2) \cos(p''t) + i(\underline{c}_1 - \underline{c}_2) \sin(p''t) \} \quad (2.31)$$

$$= e^{p''t} \{ (\underline{c}_1 + \underline{c}_1^*) \cos(p''t) + i(\underline{c}_1 - \underline{c}_1^*) \sin(p''t) \} \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Mittels Gleichung (2.23) bzw. (2.26) ist die Klassifikation der Gleichgewichtszustände möglich. Die Zusammenstellung erfolgt in der Tabelle.

Wurzeln p_1, p_2 in der komplexen Ebene	Name d. stat. Zustandes	Trajektorienverlauf	Bemerkung
	stabiler Knoten		aperiodisch gedämpfte Annäherung
	instabiler Knoten		aperiodische Entfernung
	Sattel (instabil)		Störungen entwickeln sich alternativ
	stabiler Strudel (Fokus)		gedämpfte periodische Annäherung
	instabiler Strudel		sich aufschaukelnde Schwingungen münden oft in einem Grenzzyklus
	Wirbel (stabil)		ungedämpfte Schwingungen; System stabil, nicht asymptotisch

Bemerkungen:

1. nur stabile Knoten und stabile Strudel sind auch asymptotisch stabil

2. die Fälle  bzw.  bedürfen genauerer Diskussion

3. Vielfalt stabilen und instabilen Verhaltens wächst enorm an; Tendenz zum Übergewicht der instabilen Zustände

4. Erweiterung auf n Dimensionen: siehe unten

3 Verallgemeinerung auf Systeme mit n Freiheitsgraden

$$d_t u_i = f_i(u_j) \\ i, j = 1, \dots, n$$

Statische Lösung: u_i^0
 Stabilität: $\delta u_i = u_i - u_i^0$

$$d_t \delta u_i = \sum_{k=1}^n \partial_{u_k} f_i(u^0) \delta u_k \tag{2.34}$$

Ansatz:

$$\delta u_i = c_i e^{pt} \tag{2.35}$$

$$p \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

\curvearrowright Eigenwerte p_1, \dots, p_n

Stabilität $\iff Re(p_i) < 0 \ i = 1, \dots, n$ ($\forall i \curvearrowright$ Tendenz zur Instabilität)

Es ist nicht notwendig, die Eigenwertgleichung zu lösen, sondern Anwendung des **HURWITZ-Kriteriums**:

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0 \tag{2.37}$$

$$Re(p_i) < 0 \ \forall i \iff$$

$$a_1 > 0 \tag{2.38}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.39}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.40}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ a_5 & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{2n-1} & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0 \quad (2.41)$$

wobei $a_r = 0, r > n$

Folgerung:

Mit wachsendem n wächst Vielfalt lawinenartig an. Auch mit Hurwitz-Kriterium ist Stabilität eines Systems nicht mehr handhabbar bereits bei moderatem n .

Numerische Auswertung geeignet bis $n \sim 10^2$

Stabilitätsanalyse im Plasma

1 Maxwell-Boltzmann-Gleichungen und MHD-Gleichungen

Bevor die eigentliche Stabilitätsanalyse im Plasma vorgestellt wird, stellen wir die Grundgleichungen der Plasmatheorie zusammen. Wir konzentrieren uns hierbei zum einen auf die kinetische Plasmabeschreibung mit den Maxwell-Boltzmann-Gleichungen als dem entsprechenden System der Grundgleichungen und zum anderen auf die Einflüssigkeitsbeschreibung mit den MHD-Gleichungen als dem hierzu äquivalenten System der Grundgleichungen. Die nach ihrem Komplexitätsgrad zwischen diesen beiden Theorien liegende Mehrflüssigkeitsbeschreibung analysieren wir hier nicht.

Die Gleichungen übernehmen wir aus dem Skript „Plasmaphysik“ Kapitel II und III; die Symbolik wird ebenfalls übernommen.

Die Maxwell-Boltzmann-Gleichungen der kinetischen Plasmatheorie schreiben sich als

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} F_\alpha = \left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} \quad \forall \text{ Plasmaspecies } \alpha \quad (3.1)$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} + \mu_0 \sum_{\alpha} q_{\alpha} e \int \underline{v} F_{\alpha} d^3 v \quad (3.2)$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \quad (3.3)$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} e \int F_{\alpha} d^3 v \quad (3.4)$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \quad (3.5)$$

Die MHD-Gleichungen der Einflüssigkeits-Theorie schreiben sich als

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \varrho + \partial_{\underline{x}} (\varrho \underline{u}) = 0 \quad (3.6)$$

Impulsgleichung:

$$\varrho \partial_t \underline{u} + \varrho (\underline{u} \partial_{\underline{x}}) \underline{u} + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi} = \underline{j} \times \underline{B} \quad (3.7)$$

Ampere'sches Gesetz:

$$\underline{j} = \frac{1}{\mu_0} \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} \quad (3.8)$$

Faraday'sches Gesetz:

$$\partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) - \partial_{\underline{x}} \times \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{e/m_i q} \quad (3.9)$$

Isotroper Drucktensor:

$$\underline{\underline{\Pi}} = p \underline{\underline{\delta}} \quad (3.10)$$

Adiabatisches Druckgesetz:

$$p = const \cdot \rho^\kappa \quad (3.11)$$

Für die physikalischen Größen wurden die Standard-Symbole verwendet, zur Ableitung der Gleichungen und weitergehenden Erklärungen verweisen wir auf das Skript „Plasmaphysik“.

Ausgezeichnete Rolle der Maxwell-Verteilung

Unter der Vielzahl der möglichen Verteilungsfunktionen F_α spielt die Maxwell-Verteilung $F_{M\alpha}$ eine ausgezeichnete Rolle. In vielen Fällen wird sie als Endzustand ($t \rightarrow \infty$) eingenommen, wenn das Plasmasystem ins thermodynamische Gleichgewicht kommt. Wir schreiben sie in der Form

$$F_M(\underline{x}, \underline{v}, t) = n(\underline{x}, t) \left\{ \frac{m}{2\pi k_B T(\underline{x}, t)} \right\}^{1/3} \exp\left(-\frac{m(\underline{v} - \underline{u}(\underline{x}, t))^2}{2k_B T(\underline{x}, t)}\right) \quad (3.12)$$

mit

$T(\underline{x}, t)$ Temperatur der Species α

$\underline{u}(\underline{x}, t)$ Strömungsgeschwindigkeit der Species α

$n(\underline{x}, t)$ Teilchendichte der Species α ,

wobei der Index α für die Plasmaspecies unterdrückt wurde.

2 Gleichgewicht von Plasmazuständen und stationäre Lösungen

Gesucht werden nun Zustände, in denen sich das Plasma im Gleichgewicht befindet. Mathematisch entspricht das stationären Lösungen. Um diese zu finden, setzen wir $\partial_t = 0$ sowohl für das Plasma als auch für die Kraftfelder bzw. die entsprechende Beschleunigung, d.h.

$$\partial_t F_\alpha = 0 \quad (3.13)$$

$$\partial_t \underline{E} = 0 \quad (3.14)$$

$$\partial_t \underline{B} = 0 \quad (3.15)$$

Die Boltzmann-Gleichung geht dann über in

$$\underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \underline{a} \partial_{\underline{v}} F_\alpha = \left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} \quad (3.16)$$

Konsistenz mit einer stationären Lösung liegt nur vor, wenn auch $\partial_t \underline{a} = 0$, d.h. $\partial_t \underline{E} = 0$, $\partial_t \underline{B} = 0$ gilt.

2.1 Gleichgewicht im stoßfreien Plasma

$$\left(\frac{\delta F_x}{\delta t} \right)_{coll} = 0 \quad (3.17)$$

↪

$$\underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \underline{a} \partial_{\underline{v}} F_\alpha = 0 \quad (3.18)$$

mit

$$\underline{a} = \frac{e_s}{m_s} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad (3.19)$$

↪ Eine beliebige stationäre Lösung der Vlasov-Gleichung ist eine Gleichgewichtsverteilung!

Beispiele:

1. Feldfreies und homogenes Plasma: $\underline{E} = \underline{B} = 0$, $\partial_{\underline{x}} = 0$

$$\hookrightarrow \underline{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \underline{v} F_{\alpha}^{(s)} d^3v \stackrel{!}{=} 0 \text{ und } \varrho = 0 \quad (3.20)$$

sonst Maxwell-Gleichungen nicht erfüllt.

↪ Alle Funktionen, die nur von v_x , v_y , v_z abhängen und symmetrisch sind, sind Gleichgewichtslösungen, wie

$$F_{\alpha} \propto \frac{1}{(\underline{v}^4 + \underline{v}_0^4)} \quad (3.21)$$

$$F_{\alpha} \propto \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z^2 - v_{z0}^2) \quad (3.22)$$

$$F_{\alpha} \propto \exp\left(-\frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2v_t^2}\right) \quad (3.23)$$

2. Homogenes Magneto-Plasma: $\underline{B} = \underline{B}_0$, $\underline{E} = 0$, $\partial_{\underline{x}} = 0$

$$(\underline{v} \times \underline{B}_0) \partial_{\underline{v}} F_{\alpha} = 0 \quad (3.24)$$

$$\underline{B}_0 = (0, 0, B_0) \quad (3.25)$$

$$\underline{v} \times \underline{B}_0 = \begin{pmatrix} v_y B_0 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$(v_y \partial_{v_x} - v_x \partial_{v_y}) F_{\alpha} = 0 \quad (3.27)$$

Charakteristiken:

$$\frac{dv_x}{v_y} = \frac{dv_y}{-v_x} = \frac{dF_{\alpha}}{0} \quad (3.28)$$

$$v_x dv_x + v_y dv_y = 0 \quad (3.29)$$

$$dF_\alpha = 0 \quad (3.30)$$

$$v_x^2 + v_y^2 = c_1 \quad (3.31)$$

$$F_\alpha = c_2 \quad (3.32)$$

↷

$$F_\alpha = F_\alpha(v_x^2 + v_y^2, v_z^2) \quad (3.33)$$

2.2 Gleichgewicht im stößebehafteten Plasma

- Stoß-Beschreibung nach Krook:

$$\underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \underline{a} \partial_{\underline{v}} F_\alpha = -\nu(F_\alpha - F_{M\alpha}) \quad (3.34)$$

und $\underline{E}=0$

$$\curvearrowright F_\alpha = F_{M\alpha} \quad (3.35)$$

ist Gleichgewichtsverteilung im feldfreien wie im Magneto-Plasma.

Beweis:

$$F_{M\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}v_{t\alpha})^3} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2v_{t\alpha}^2}\right) \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{2}k_B T_\alpha = \frac{m}{2}v_{t\alpha}^2 \quad (3.37)$$

$$\partial_{\underline{x}} F_\alpha = 0 \quad (3.38)$$

$$\underline{a} \partial_{\underline{v}} F_\alpha = (\underline{v} \times \underline{B}_0) \partial_{\underline{v}} F_\alpha = 0, \text{ da } \partial_{\underline{v}} F_\alpha \perp \underline{v} \times \underline{B}_0. \quad (3.39)$$

- Einschub:

Ausgezeichnete Rolle der Maxwell-Verteilung

(a) Mathematisch: Konvergenz natürlicher Verteilungen gegen Normalverteilung (zentraler Grenzwertsatz)

(b) Physikalisch: Maxwell-Verteilung entspricht maximaler Entropie

$$S(t, \underline{x}) = -k_B \int F(t, \underline{x}, \underline{v}) \cdot \ln(F(t, \underline{x}, \underline{v})) d^3 v \quad (3.40)$$

(vgl. $\sigma = -\sum_l P_l \cdot \ln(P_l)$, Index α unterdrückt)

↷

$$d_t S = -k_B \int (d_t F \cdot \ln(F) + d_t F) d^3 v \quad (3.41)$$

Es gilt:

$$d_t F = \partial_t F + \partial_{\underline{x}} F \cdot \underline{v} + \partial_{\underline{v}} F \cdot \underline{a} \quad (3.42)$$

1. $d_t S = 0$ im Vlasov-Plasma ($d_t F = 0$)
Entropie immer konstant, tendiert nicht zu einem Maximum
2. Boltzmann-Plasma: $d_t F = \left(\frac{\delta F}{\delta t} \right)_{coll}$

Satz:

Die Maxwell-Verteilung ist von maximaler Entropie.

Beweis:

Variationsproblem mit Nebenbedingungen: Teilchenzahl-, Impuls-, Energieerhaltung ($\phi = 0, \underline{A} = 0$)

Nebenbedingungen:

$$\text{Gesamtmasse: } n(t, \underline{x}) = \int F(t, \underline{x}, \underline{v}) d^3 v$$

$$\text{Gesamtimpuls: } \underline{P}(t, \underline{x}) = \int m \underline{v} F(t, \underline{x}, \underline{v}) d^3 v$$

$$\text{Gesamtenergie: } \varepsilon(t, \underline{x}) = \int \frac{m}{2} \underline{v}^2 F(t, \underline{x}, \underline{v}) d^3 v$$

Lagrange-Parameter: $\lambda, \underline{\mu}, \nu(t, \underline{x})$ (da $n, \underline{P}, \varepsilon$ von t, \underline{x} abhängig)

$$\leadsto \delta \left\{ S + \lambda \left[n - \int F d^3 v \right] + \underline{\mu} \left[\underline{P} - \int m \underline{v} F d^3 v \right] + \nu \left[\varepsilon - \int \left(\frac{m}{2} \underline{v}^2 \right) F d^3 v \right] \right\} = 0 \quad (3.43)$$

$$-k_B \int (\ln F + 1) \delta F d^3 v - \lambda \int \delta F d^3 v - \underline{\mu} \int m \underline{v} \delta F d^3 v - \nu \int \frac{m}{2} \underline{v}^2 \delta F d^3 v = 0$$

$$\leadsto k_B (\ln F + 1) + \lambda + m \underline{\mu} \underline{v} + \nu \frac{m}{2} \underline{v}^2 = 0 \quad (3.44)$$

$$F = \exp(-1) \exp\left(-\frac{\lambda}{k_B}\right) \exp\left(-\frac{m \underline{\mu} \underline{v}}{k_B}\right) \exp\left(-\frac{\nu}{k_B} \frac{m}{2} \underline{v}^2\right) \quad (3.45)$$

$$F = \exp\left(-\frac{k_B + \lambda}{k_B}\right) \exp\left(\frac{m \underline{\mu}^2}{2 k_B \nu}\right) \exp\left(-\frac{\nu}{k_B} \frac{m}{2} \left(\underline{v} + \frac{\underline{\mu}}{\nu}\right)^2\right) \quad (3.46)$$

Ersetzung der Lagrange-Parameter:

$$\text{Temperatur } (\leadsto \nu) \quad T = \frac{1}{\nu}$$

$$\text{Strömungsgeschwindigkeit } (\leadsto \underline{\mu}) \quad \underline{u} = -\frac{\underline{\mu}}{\nu}$$

$$\text{Normierung } (\leadsto \lambda) \quad n = \int F d^3 v$$

$$F(t, \underline{x}, \underline{v}) = n(t, \underline{x}) \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T(t, \underline{x})}}^3 \exp\left(-\frac{m(\underline{v} - \underline{u}(t, \underline{x}))^2}{2k_B T(t, \underline{x})}\right) \quad (3.47)$$

Man sagt auch: Driftende Maxwell-Verteilung mit Driftgeschwindigkeit \underline{u}

- zurück zum Gleichgewicht im feldfreien- oder Magneto-Plasma

$$\partial_t = 0, \partial_{\underline{x}} = 0 \quad \leadsto \quad n(t, \underline{x}) = n = \text{const} \quad (3.48)$$

$$\underline{u}(t, \underline{x}) = \underline{u} = \text{const} \quad (3.49)$$

$$T(t, \underline{x}) = T = \text{const} \quad (3.50)$$

$$\leadsto F(\underline{v}) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}^3 \cdot \exp \left\{ -\frac{m(\underline{v} - \underline{u})^2}{2k_B T} \right\} \quad (3.51)$$

Galilei-Trafo ins Koordinatensystem mit $\underline{u} = 0$

$$F(\underline{v}) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp \left\{ -\frac{m\underline{v}^2}{2k_B T} \right\} \quad (3.52)$$

3 Stabilitätsuntersuchung mit Normalmoden-Analyse

3.1 Kinetische Plasma-Beschreibung

- Idee: wie in Systemen, die nur rein zeitabhängig sind

1. Start:

ein bestimmter Gleichgewichtszustand $(\)_0, \partial_t = 0$

$$\underline{E}_0(\underline{x})$$

$$\underline{B}_0(\underline{x})$$

$$F_{0\alpha}(\underline{x}, \underline{v})$$

2. Störung von $(\)_0$:

$$\underline{E}(t, \underline{x}) = \underline{E}_0(\underline{x}) + \delta \underline{E}(t, \underline{x}) \quad (3.53)$$

$$\underline{B}(t, \underline{x}) = \underline{B}_0(\underline{x}) + \delta \underline{B}(t, \underline{x}) \quad (3.54)$$

$$F_{0\alpha}(t, \underline{x}, \underline{v}) = F_{\alpha}(\underline{x}, \underline{v}) + \delta F_{0\alpha}(t, \underline{x}, \underline{v}) \quad (3.55)$$

$$(3.56)$$

3. Linearisierung der allgemeinen Gleichungen bezüglich $\delta \underline{E}, \delta \underline{B}, \delta F_{\alpha}$

4. Lösung des linearen Systems: $\delta(\) \propto e^{pt} \propto e^{-i\omega t} = \text{Normalmoden}$
 $\omega = \omega' + i\omega''$; Instab. $\triangleq \omega'' > 0$

5. Beurteilung der zeitlichen Entwicklung von $\delta \underline{E}(t, \underline{x}), \delta \underline{B}(t, \underline{x}), \delta F_{\alpha}(t, \underline{x}, \underline{v})$

3.2 MHD-Beschreibung

- Idee: analog

- statt F_{α} werden jetzt die Momente gestört:

$$n(t, \underline{x}) = n_0(\underline{x}) + \delta n(t, \underline{x}) \quad (3.57)$$

$$u(t, \underline{x}) = u_0(\underline{x}) + \delta u(t, \underline{x}) \quad (3.58)$$

- ggf. sind noch höhere Momente zu betrachten

KAPITEL IV

Zur Klassifizierung von Plasma-Instabilitäten

1 Geschwindigkeitsraum-Instabilitäten (Mikro-Instabilitäten)

Ortsunabhängige (homogene) Gleichgewichtslösungen,
Treiben von Instabilitäten durch Inhomogenitäten im Geschwindigkeitsraum,
Maxwell-Verteilung als Gleichgewichtszustand
 $\partial_{\underline{x}} = 0, \partial_{\underline{v}} \neq 0$

2 Ortsraum-Instabilitäten (Makro-Instabilitäten)

Ortsabhängige (inhomogene) Gleichgewichtslösungen,
Treiben von Instabilitäten durch Inhomogenitäten im Ortsraum $\partial_{\underline{x}} \neq 0$.
 $\partial_{\underline{v}} \neq 0$ weniger wichtig. Meist betrachtet in MHD oder Multi-Fluid-Beschreibung

Geschwindigkeitsraum-Instabilitäten (Mikro-Instabilitäten)

1 Beam-Plasma-Instabilität (Zwei-Strom-Instabilität)

Situation:

- homogenes, unbegrenztes, stößefreies Plasma aus verschiedenen Komponenten: $\underline{B}_0, \underline{E}_0, F_{0\alpha}(\underline{v})$
- Relativ-Bewegung zwischen verschiedenen Komponenten oder Teilchenpopulationen einer Komponente

Konkret:

3 Populationen (Indices α)

z.B.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = e: \text{langsame Elektronen} \\ \alpha = b: \text{schnelle Elektronen} \\ \alpha = i: \text{Ionen} \end{array} \right\} \text{räumlich unbegrenzt}$$

Mit den Verteilungsfunktionen $F_{0\alpha}$ im Gleichgewicht

\curvearrowright Teilchendichten: $n_{0\alpha} = \int F_{0\alpha}(\underline{v}) d^3v$

mit Strömungsgeschwindigkeit: $\underline{u}_{0\alpha} = \frac{1}{n_{0\alpha}} \int \underline{v} F_{0\alpha} d^3v$

Gleichgewicht:

In welchen Relationen müssen $n_\alpha^0, \underline{u}_\alpha^0$ stehen, damit eine feldfreie Gleichgewichtslösung existiert?

$$\rho_0 = \sum_\alpha q_\alpha e n_{0\alpha} = q_i e n_{0i} + q_e e n_{0e} + q_b e n_{0b} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.1)$$

$$\underline{j}_0 = \sum_\alpha q_\alpha e n_{0\alpha} \underline{u}_{0\alpha} = q_i e n_{0i} \underline{u}_{0i} + q_e e n_{0e} \underline{u}_{0e} + q_b e n_{0b} \underline{u}_{0b} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.2)$$

$$\underline{u}_{0b} = - \frac{q_i n_{0i} \underline{u}_{0i} + q_e n_{0e} \underline{u}_{0e}}{q_b n_{0b}} \quad (5.3)$$

Es ist möglich, die Betrachtungen im Ionen-Ruhsystem $\underline{u}_{0i} \equiv 0$ auszuführen:

$$\underline{u}_{0b} = - \frac{q_e n_{0e}}{q_b n_{0b}} \underline{u}_{0e} \quad (5.4)$$

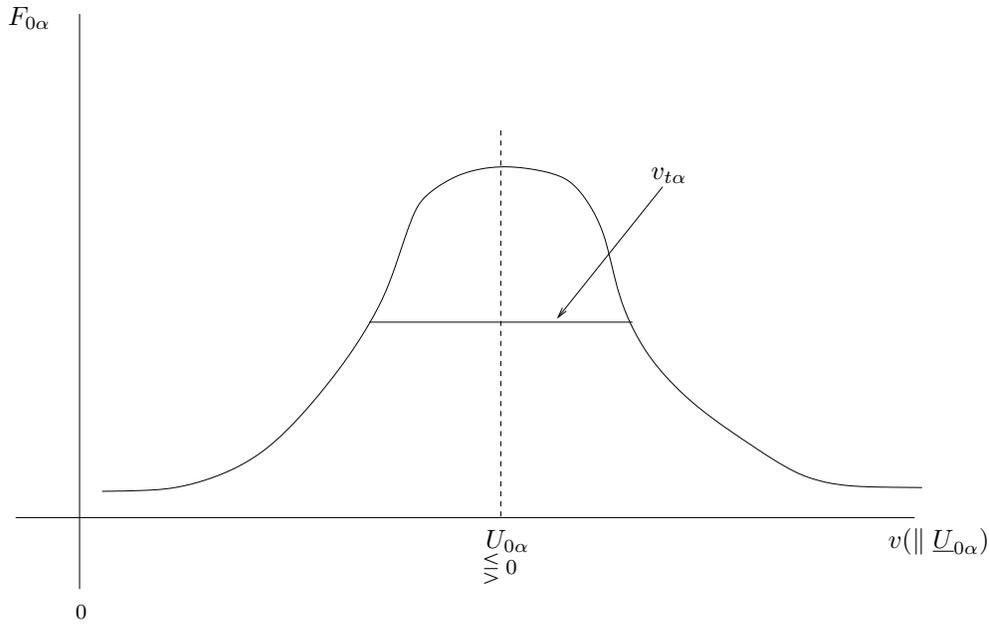
Unser Beispiel: e,b Elektronen.

D.h. Elektronen müssen gegenströmen, wobei dünnere Population schneller sein muss!

Damit ist klar, dass der Gleichgewichtszustand existiert.

Für die $F_{0\alpha}$ wählen wir driftende Maxwell-Verteilungen

$$F_{0\alpha} = \frac{n_{0\alpha}}{(v_{t\alpha}\sqrt{\pi})^3} \cdot \exp\left\{-\frac{(v - u_{0\alpha})^2}{v_{t\alpha}^2}\right\} \quad (5.5)$$



Thermische Geschwindigkeit $v_{t\alpha}$ und Temperatur T_α sind verknüpft über

$$\frac{m_\alpha}{2} v_{t\alpha}^2 = k_B T_\alpha \quad (5.6)$$

Stabilität dieses Gleichgewichtes:

- Suche nach Instabilität ohne magnetische Störung ($\delta \underline{B} = 0$, $\delta \underline{E} \neq 0$); d.h. suche nach Eigenlösungen in einem Unterraum
- Ansatz

$$\underline{E} = 0 + \delta \underline{E} \quad (5.7)$$

$$\underline{B} = 0 + 0 \quad (5.8)$$

$$F_\alpha = F_{0\alpha} + \delta F_\alpha \quad (5.9)$$

$$\varrho = 0 + \delta \varrho \quad (5.10)$$

$$\underline{j} = 0 + \delta \underline{j} \quad (5.11)$$

- Linearisiertes Maxwell-Vlasov-System:

$$0 = \frac{1}{c^2} \partial_t \delta \underline{E} + \mu_0 \delta \underline{j} \quad (5.12)$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \delta \underline{E} = 0 \quad (5.13)$$

$$\partial_{\underline{x}} \delta \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta \rho \quad (5.14)$$

$$\partial_t \delta F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} \delta F_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \delta \underline{E} \partial_{\underline{v}} F_{0\alpha} = 0 \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

mit

$$\delta \rho = \sum_\alpha q_\alpha e \int \delta F_\alpha d^3 v \quad (5.17)$$

$$\delta \underline{j} = \sum_\alpha q_\alpha e \int \underline{v} \delta F_\alpha d^3 v \quad (5.18)$$

- Lösungsansatz:

$$\delta \underline{E}, \delta F_\alpha \propto e^{p t} \quad (5.19)$$

$$\propto e^{-i \omega t} \quad (5.20)$$

$$\omega = \omega' + i \omega'' \quad (5.21)$$

$$\text{Instabil} \triangleq \omega'' > 0$$

$$\curvearrowright \partial_t \rightarrow -i \omega$$

- Plasma sei räumlich unbegrenzt

$$\curvearrowright \text{Fourier-Transformation bzgl. } \underline{x}, \text{ z.B. } \delta \underline{E} = \int \delta \widehat{E}(\underline{k}) e^{i \underline{k} \underline{x} - i \omega t} d^3 k$$

$$\curvearrowright \partial_{\underline{x}} \rightarrow +i \underline{k}$$

$$\curvearrowright 0 = -i \varepsilon_0 \omega \delta \widehat{E} + \delta \widehat{j} \quad (5.22)$$

$$i \underline{k} \times \delta \widehat{E} = 0 \curvearrowright \underline{k} \parallel \delta \widehat{E} \quad (5.23)$$

$$\underline{k} \delta \widehat{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta \widehat{\rho} \quad (5.24)$$

$$-i \omega \delta \widehat{F}_\alpha + i \underline{k} \cdot \underline{v} \delta \widehat{F}_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \partial_{\underline{v}} F_{0\alpha} \delta \widehat{E} = 0 \quad (5.25)$$

mit

$$\delta \widehat{\rho} = \sum_\alpha q_\alpha e \int \delta \widehat{F}_\alpha d^3 v \quad (5.26)$$

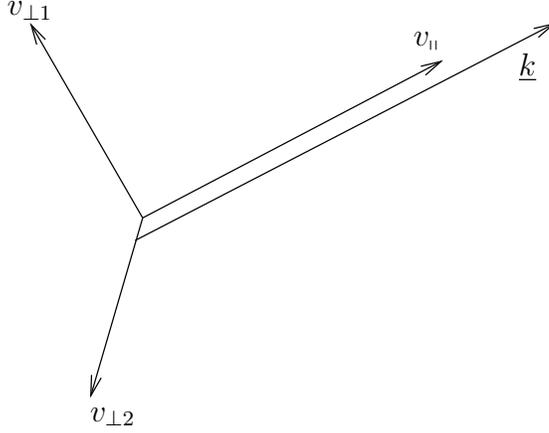
$$\delta \widehat{j} = \sum_\alpha q_\alpha e \int \underline{v} \delta \widehat{F}_\alpha d^3 v \quad (5.27)$$

\curvearrowright algebraisches lineares System für $\delta(\dots)$

$$\delta \widehat{F}_\alpha = \frac{q_\alpha e \cdot \partial_{\underline{v}} F_{0\alpha}}{m_\alpha i (\omega - \underline{k} \cdot \underline{v})} \delta \widehat{E} \quad (5.28)$$

$$\delta \widehat{\rho} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 e^2}{m_\alpha} \frac{1}{i} \int \frac{\partial_{\underline{v}} F_{0\alpha}}{\omega - \underline{k} \cdot \underline{v}} d^3 v \delta \widehat{E} \quad (5.29)$$

- Koordinatensystem im v-Raum



$$\leadsto \underline{v} \cdot \underline{k} = v_{\parallel} k \text{ mit } k = |\underline{k}| \quad (5.30)$$

$$\leadsto \underline{k} \delta \widehat{\underline{E}} = k \delta \widehat{\underline{E}}_{\parallel}, \text{ da } \underline{k} \parallel \delta \widehat{\underline{E}}, \delta E_{\perp} = 0 \quad (5.31)$$

$$\leadsto \delta \widehat{Q} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 e^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{i} \int \frac{\partial_{v_{\parallel}} F_{0\alpha}}{\omega - kv_{\parallel}} dv_{\parallel} dv_{\perp 1} dv_{\perp 2} \delta \widehat{E}_{\parallel} \quad (5.32)$$

$$\delta \widehat{Q} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 e^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{i} \int \frac{\partial_{v_{\parallel}} \tilde{F}_{0\alpha}}{\omega - kv_{\parallel}} dv_{\parallel} \delta \widehat{E}_{\parallel} \quad (5.33)$$

mit

$$\tilde{F}_{0\alpha} = \int F_{0\alpha} dv_{\perp 1} dv_{\perp 2}$$

$$ik \delta \widehat{E}_{\parallel} = -\frac{i}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 e^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\partial_{v_{\parallel}} \tilde{F}_{0\alpha}}{\omega - kv_{\parallel}} dv_{\parallel} \delta \widehat{E}_{\parallel} \quad (5.34)$$

bzw.

$$\left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 e^2}{\varepsilon_0 m_{\alpha} k^2} \int \frac{\partial_{v_{\parallel}} \tilde{F}_{0\alpha}}{v_{\parallel} - \omega/k} dv_{\parallel} \right\} \delta \widehat{E}_{\parallel} = 0 \quad (5.35)$$

Eigenwert-Problem reduziert sich auf eine einzige Gleichung. Gesucht wird Eigenwert ω , insbesondere $Im(\omega) = \omega''$. Eigenfunktion $\delta \widehat{E}_{\parallel} \neq 0 \leadsto \{\dots\} = 0$. Eigenwert-Gleichung heißt auch Dispersionsrelation, da $\omega = \omega(k)$.

- Bemerkung:

Ampère'sches Gesetz

$$0 = -i\varepsilon_0 \delta \widehat{\underline{E}} + \delta \widehat{\underline{j}} \quad (5.36)$$

nicht benutzt. Enthält keine weitere Information, denn

$$\delta\hat{E}_{||} = \frac{1}{i\varepsilon_0\omega}\delta\hat{j}_{||} = \frac{1}{i\varepsilon_0\omega}\sum_{\alpha}q_{\alpha}e\int v_{||}\frac{q_{\alpha}e\partial_{v_{||}}\tilde{F}_{0\alpha}}{im_{\alpha}(\omega-kv_{||})}dv_{||}\delta\hat{E}_{||} \quad (5.37)$$

$$\left\{1 - \sum_{\alpha}\frac{q_{\alpha}^2e^2}{\varepsilon_0m_{\alpha}}\frac{1}{\omega k}\int\frac{v_{||}\partial_{v_{||}}\tilde{F}_{0\alpha}}{v_{||}-\omega/k}dv_{||}\right\}\delta\hat{E}_{||} = 0 \quad (5.38)$$

$$\left\{1 - \sum_{\alpha}\frac{q_{\alpha}^2e^2}{\varepsilon_0m_{\alpha}}\frac{1}{\omega k}\int\frac{(v_{||}-\omega/k+\omega/k)\partial_{v_{||}}\tilde{F}_{0\alpha}}{v_{||}-\omega/k}dv_{||}\right\}\delta\hat{E}_{||} = 0 \quad (5.39)$$

$$\left\{1 - \sum_{\alpha}\frac{q_{\alpha}^2e^2}{\varepsilon_0m_{\alpha}}\frac{1}{k^2}\int\frac{\partial_{v_{||}}\tilde{F}_{0\alpha}}{v_{||}-\omega/k}dv_{||}\right\}\delta\hat{E}_{||} = 0 \quad (5.40)$$

Ampere'sches Gesetz führt somit auf die bereits oben abgeleitete Dispersionsrelation.

• Diskussion der Eigenwerte / Dispersionsrelation

1. Thermisches Plasma, $v_{t\alpha} \neq 0$: Einführung der Plasma-Dispersionsfunktion:

$$\text{Def: } Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-v^2}}{v-\xi}dv \quad \left| \text{ "fast" eine Standardfunktion} \right. \quad (5.41)$$

$$\curvearrow \text{Ableitung: } Z'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-v^2}}{(v-\xi)^2}dv \quad \left| \text{ part. Integration!} \right. \quad (5.42)$$

$$Z'(\xi) = -2[1 + \xi * Z(\xi)] \quad (5.43)$$

Umformung der Integrals in {}:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial_{v_{||}}F_{0\alpha}}{v_{||}-\omega/k}dv_{||} = +\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{0\alpha}}{(v_{||}-\omega/k)^2}dv_{||} \quad (5.44)$$

$$= \frac{n_{0\alpha}}{v_{t\alpha}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{(v_{||}-u_{0\alpha||})^2}{v_{t\alpha}^2}\right)}{(v_{||}-\omega/k)^2}dv_{||} \quad (5.45)$$

$$(5.46)$$

$$\frac{v_{||}-u_{0\alpha||}}{v_{t\alpha}} = v \quad (5.47)$$

$$= \frac{n_{0\alpha}}{\sqrt{\pi}v_{t\alpha}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-v^2}}{\left(v-\frac{\omega/k-u_{0\alpha||}}{v_{t\alpha}}\right)^2}dv \quad (5.48)$$

$$= \frac{n_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2}\cdot Z'\left(\frac{\omega/k-u_{0\alpha||}}{v_{t\alpha}}\right) \quad (5.49)$$

\curvearrow Dispersionsrelation für thermische Zwei-Strom-Instabilität

$$1 - \sum_{\alpha}\frac{q_{\alpha}^2n_{0\alpha}}{\varepsilon_0m_{\alpha}}\frac{1}{k^2v_{t\alpha}^2}\cdot Z'\left(\frac{\omega/k-u_{0\alpha||}}{v_{t\alpha}}\right) = 0 \quad (5.50)$$

$$1 - \sum_{\alpha}\frac{\omega_{\alpha}^2}{k^2v_{t\alpha}^2}\cdot Z'\left(\frac{\omega/k-u_{0\alpha||}}{v_{t\alpha}}\right) = 0 \quad (5.51)$$

Es erweist sich, dass $v_{t\alpha} > 0$ nicht essentiell für die Instabilität ist.

2. Kaltes Plasma, $v_{t\alpha} \rightarrow 0 \leadsto F_{0\alpha}(v_{||}) \rightarrow n_{0\alpha}\delta(v_{||} - u_{0\alpha||})$

$$\int \frac{\partial v_{||} F_{0\alpha}}{v_{||} - \omega/k} dv_{||} = \int \frac{F_{0\alpha}}{(v_{||} - \omega/k)^2} dv_{||} \quad (5.52)$$

$$= \frac{n_{0\alpha}}{(u_{0\alpha||} - \omega/k)^2} \quad (5.53)$$

\leadsto

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{e^2 q_{\alpha}^2 n_{0\alpha}}{\varepsilon_0 m_{\alpha}} \frac{1}{(\omega - k u_{0\alpha||})^2} = 0 \quad (5.54)$$

mit

$$\frac{e^2 q_{\alpha}^2 n_{0\alpha}}{\varepsilon_0 m_{\alpha}} = \omega_{\alpha}^2 \quad (5.55)$$

Plasmafrequenz der Komponente α

$\alpha = i, e, b$:

$$1 - \frac{\omega_i^2}{(\omega - k u_{0i||})^2} - \frac{\omega_e^2}{(\omega - k u_{0e||})^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k u_{0b||})^2} = 0 \quad (5.56)$$

Sei $u_{0i||} = 0$ und $\omega_i \ll \omega_e, \omega_b$ wegen $m_i \gg m_e$

$$1 - \frac{\omega_e^2}{(\omega - k u_{0e||})^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k u_{0b||})^2} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Polynom 4. Ordnung.} \\ 4 \text{ Lösungen reell} \\ \text{oder 2 konjugiert} \\ \text{komplexe Lösungen.} \end{array} \right. \quad (5.57)$$

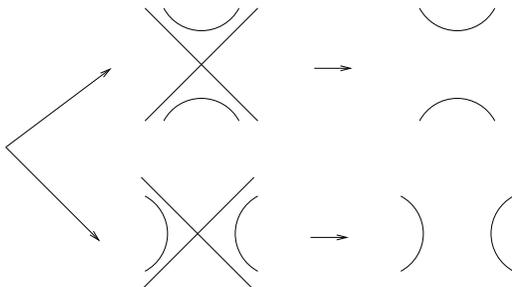
Sei $\omega_b \ll \omega_e$ (Dünnere Beam b)

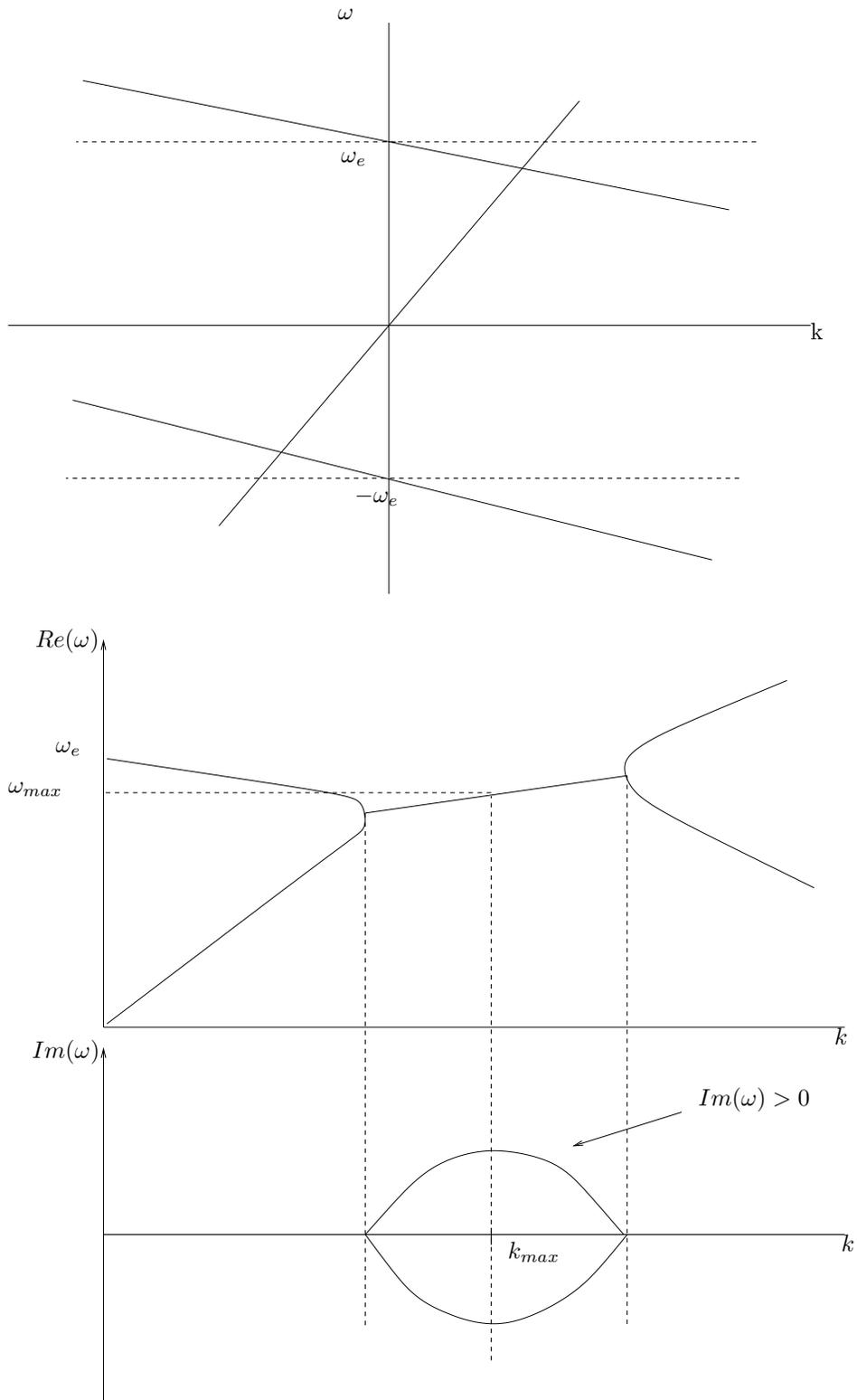
$$\left[1 - \frac{\omega_e^2}{(\omega - k u_{0e||})^2} \right] (\omega - k u_{0b||})^2 = \omega_b^2 \approx 0 \quad (5.58)$$

Faktoren links getrennt ≈ 0 setzen:

$$\begin{aligned} \omega - k u_{0e||} &= \pm \omega_e \\ \omega - k u_{0b||} &= 0 \quad (\text{Doppellösung}) \end{aligned} \quad (5.59)$$

Näherungslösung liefert somit mehrere lineare Dispersionszweige, d.h. Geraden im ω - k -Diagramm. Näherungslösung brauchbar bis auf Kreuzungspunkt, dort Aufspaltung wie





$$\begin{aligned}
 Im(\omega) > 0 : \delta E_{||} &= \delta \hat{E}_{||} e^{-i\omega t} \\
 &= \delta \hat{E}_{||} e^{-i \cdot Re(\omega)t} \cdot e^{+Im(\omega)t}
 \end{aligned}$$

anwachsend mit der Anwachsrate $Im(\omega)$

In Realität wachsen genau die Störungen wellenartig an, für die $Im(\omega) = max$ gilt. Dazu gehören die Frequenzen $Re(\omega_{max})$ und k_{max} .

Bemerkung:

- Das war einer der einfachsten Fälle!
- Es existieren zahlreiche Variationen dieses Grundtyp einer Instabilität: Ionen-Beams, im $B_0 \neq 0$ existieren viel mehr Moden bereits ohne Beam, Beam destabilisiert verschiedene dieser Moden.

Je nach Dichte und Geschwindigkeit des Beams ergeben sich als instabile Moden

- Whistler-Instabilität
- Ionen-Zyklotron-Instabilität
- Bump-on-tail-Instabilität

2 Anisotropie-Instabilität

Situation:

- homogenes, unbegrenztes, stößefreies Plasma aus 2 Komponenten (Minimum) $\underline{B}_0 \neq 0$, $\underline{E}_0 = 0$
- Termische Geschwindigkeiten der Plasmateilchen einer (oder beider) Komponenten parallel zum Magnetfeld und senkrecht zum Magnetfeld sind unterschiedlich.

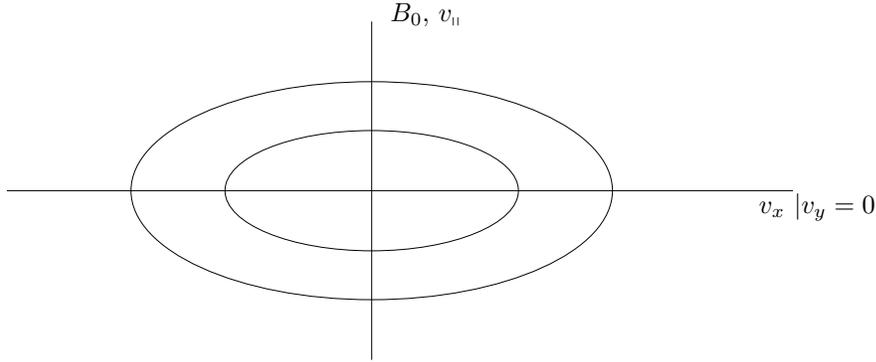
Konkret: Verteilungsfunktionen seien Bi-Maxwellsch:

$$F_{0\alpha}(v_{||}, v_{\perp}) = \frac{n_{0\alpha}}{v_{t\alpha||} v_{t\alpha\perp}^2 \sqrt{\pi}^3} \cdot \exp\left(-\frac{v_{||}^2}{v_{t\alpha||}^2} - \frac{v_{\perp}^2}{v_{t\alpha\perp}^2}\right) \quad (5.60)$$

$$\text{Isoflächen } F_{0\alpha} = \text{const} \curvearrowright \frac{v_{||}^2}{v_{t\alpha||}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{v_{t\alpha\perp}^2} = \text{const}$$

Koordinatensystem

$$\begin{aligned} v_{||} &= v_z \\ v_{\perp} &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & v_x &= v_{\perp} \cos \varphi \\ \tan \varphi &= \frac{v_y}{v_x} & v_y &= v_{\perp} \sin \varphi \end{aligned}$$



Gleichgewichtszustand: erfüllt

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= 0 & \checkmark & & \text{(Neutralität)} \\ \underline{j}_0 &= 0 & \checkmark & & \text{(jede Vektorkomponente ist symmetrisch um } v = 0) \end{aligned}$$

Störung des Gleichgewichts/der Stabilität: $\partial_x \rightarrow ik$ wegen Homogenität

$$-c^2 \cdot i\underline{k} \times \cdot \delta \hat{\underline{B}} + \frac{1}{\varepsilon_0} \delta \underline{j} = i\omega \cdot \delta \hat{\underline{E}} \quad (5.61)$$

$$i\underline{k} \times \delta \hat{\underline{E}} = i\omega \cdot \delta \hat{\underline{B}} \quad (5.62)$$

$$i\underline{k} \cdot \underline{v} \cdot \delta \hat{F}_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{v} \times \underline{B}_0) \cdot \partial_{\underline{v}} \delta \hat{F}_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\delta \hat{\underline{E}} + \underline{v} \times \delta \hat{\underline{B}}) \cdot \partial_{\underline{v}} \hat{F}_{0\alpha} = i\omega \cdot \delta \hat{F}_\alpha \quad (5.63)$$

Einschränkung:

- Störungen parallel zu \underline{B}_0 ausbreitend: $\underline{k} = (0, 0, k)$
- nur Elektronen seien anisotrop, Ionen isotrop
- $\omega_p \ll \omega_e$
- $v_{te||, \perp} \rightarrow v_{t||, \perp}$ (Der Index e in der parallelen und der senkrechten thermischen Elektronengeschwindigkeit wird im Weiteren unterdrückt.)

Eigenwerte/Dispersionsrelation: $\omega(k)$

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \left\{ \frac{\omega}{k \cdot v_{t||}} \cdot Z(\xi) + A[1 + \xi \cdot Z(\xi)] \right\} = 0 \quad (5.64)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_{t\perp}}{v_{t||}} - 1 & \text{Anisotropie} \\ \xi &= \frac{\omega - \Omega_e}{k \cdot v_{t||}} & (5.65) \\ Z & & \text{Plasma-Dispersionsfunktion} \end{aligned}$$

- es existieren komplexe Lösungen für ω

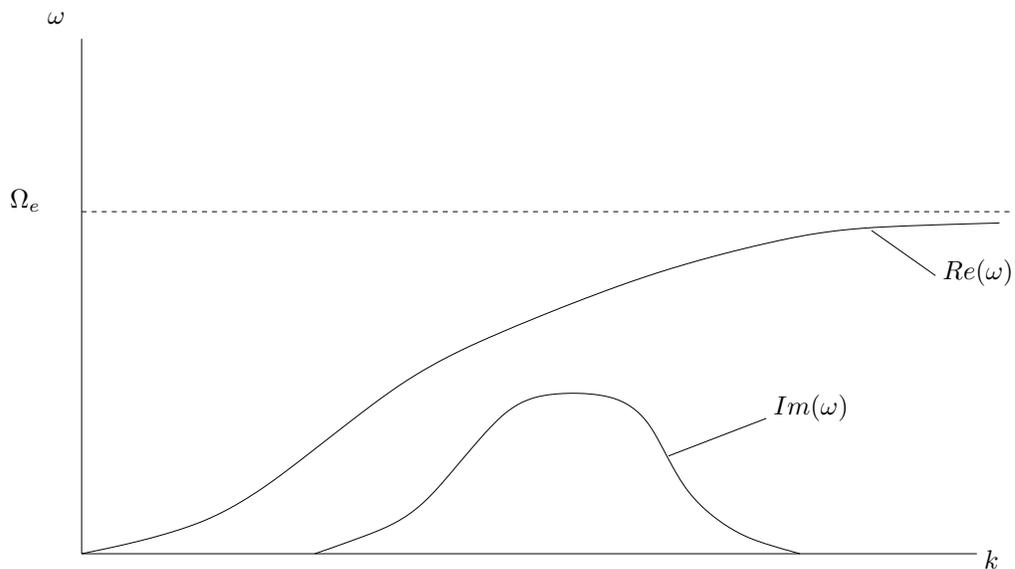
- analytische Näherungsausdrücke für $\left| \frac{Re(\omega) - \Omega_e}{k \cdot v_{t\parallel}} \right| \gg 1$ und $|Im(\omega)| \ll |Re(\omega)|$

$$\curvearrowright Im(\omega) = \sqrt{\pi} \frac{\Omega_e}{k \cdot v_{t\parallel}} \left(1 - \frac{Re(\omega)}{\Omega_e} \right)^2 [A\Omega_e - (A+1) \cdot Re(\omega)] \cdot \exp \left[- \left(\frac{Re(\omega) - \Omega_e}{k \cdot v_{t\parallel}} \right)^2 \right] \quad (5.66)$$

\curvearrowright

Wenn $A = 0$: $Im(\omega) < 0$ stabil

Wenn $A > 0$, d.h. $v_{t\perp} > v_{t\parallel}$: $Im(\omega) > 0$ instabil



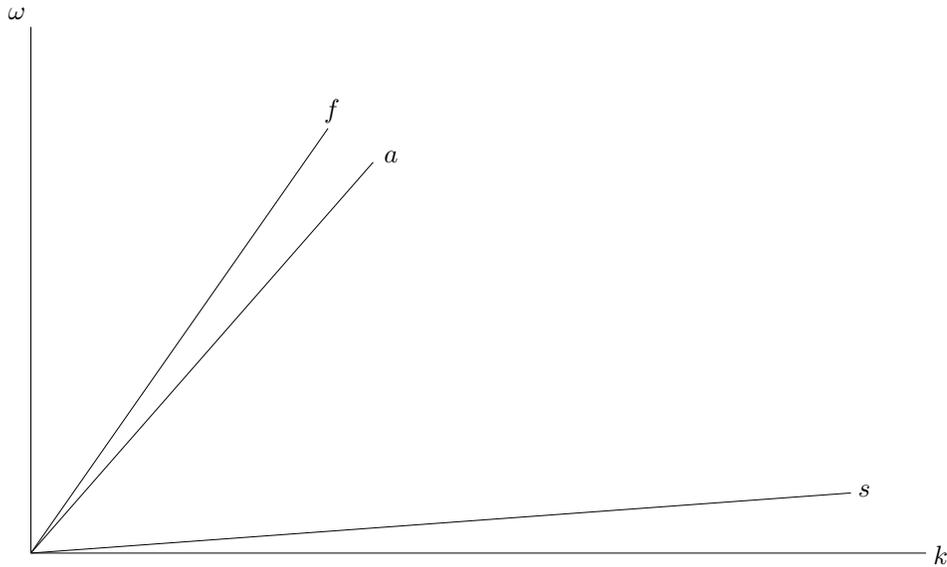
Phys. Fluids, 19(1976), 1507

3 MHD-Instabilitäten

- Betrachtung von Plasma-Bedingungen, die MHD-Betrachtung erlauben
- Erinnerung an MHD-Moden

Alfven-Mode (a)
Fast-Mode (f)
Slow-Mode (s)

- Darstellung z.B. im Friedrichs-Diagramm oder bei festen θ im ω -k-Diagramm;
 $\theta = 10^\circ$ (quasi-parallel)



- MHD-Moden sind stabil im isotropen Plasma:

$$\underline{\underline{\Pi}} = p\underline{\underline{\delta}} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

- Instabilität im anisotropen Plasma ($\underline{B}_0 \parallel \underline{e}_z$):

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

- (a) \rightarrow Fire-Hose-Instabilität
- (s) \rightarrow Mirror-Instabilität

- Anisotropie des Plasmas bevorzugt durch Plasmabeta β beschrieben:

$$\beta := \frac{p}{p_m} = \frac{p}{\underline{B}^2/2\mu_0} = \frac{\text{thermischer Druck}}{\text{magnetischer Druck}} \quad (5.69)$$

- insbesondere:

$$\beta_{\perp} := \frac{p_{\perp}}{\underline{B}^2/2\mu_0}, \quad \beta_{\parallel} := \frac{p_{\parallel}}{\underline{B}^2/2\mu_0} \quad (5.70)$$

- Gleichgewichtszustand:

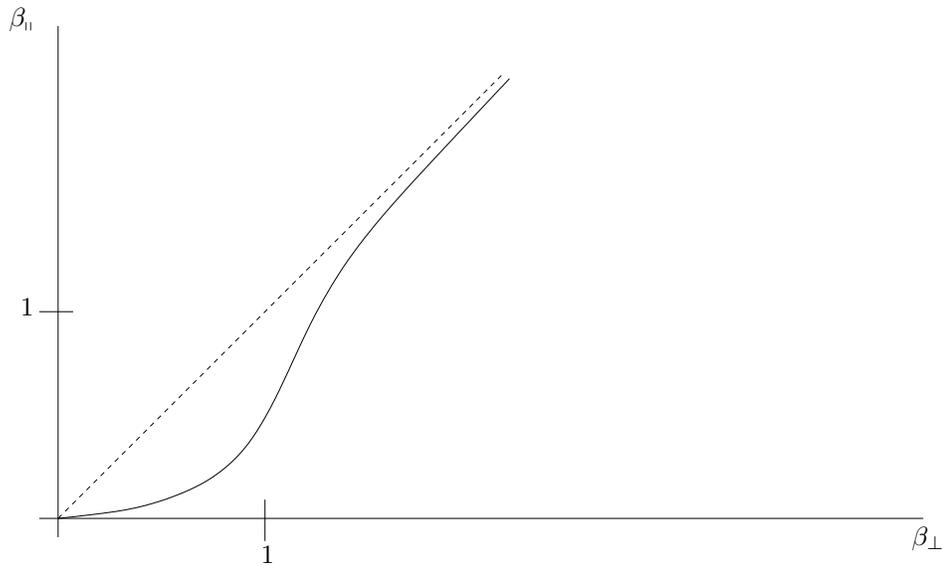
$$\underline{E}_0 = 0, \underline{j}_0 = 0, \varrho_0 = 0, \underline{u}_0 = 0, n_0 = 0, \\ \underline{B}_0 = B_0 \underline{e}_z, B_0 = \text{const},$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} p_{\perp 0} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp 0} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel 0} \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

- Stabilitätsanalyse = Normalmoden-Analyse der linearisierten MHD-Gleichungen (wird hier nicht vorgeführt; vgl. Hasegawa, Plasma Instab and Nonlinear Effects)

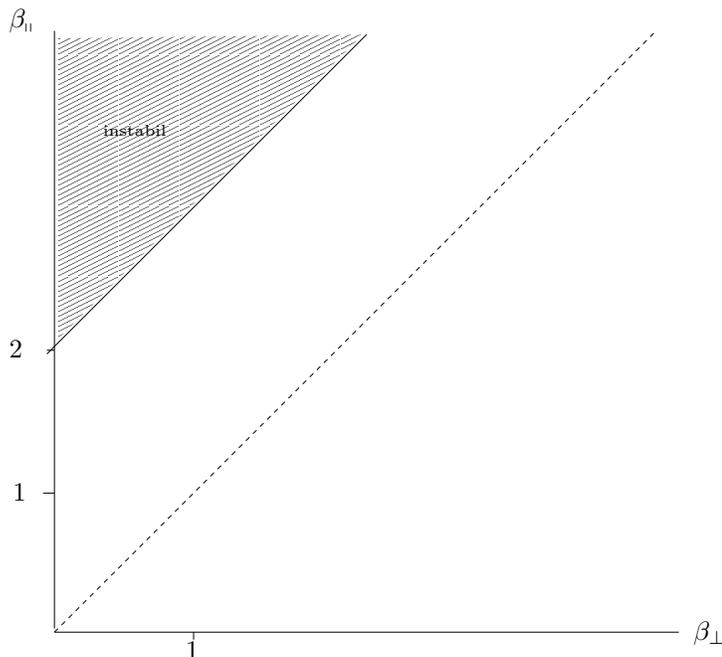
3.1 Mirror-Instabilität

- $Im(\omega) > 0$: $1 + \beta_{\perp} \left(1 - \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}}\right) < 0$ für $k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$ (quasi-senkrecht) und $Re(\omega) = 0$
 $\curvearrowright \beta_{\perp} > \beta_{\parallel}$ notwendige Bedingung!



3.2 Fire-Hose-Instabilität

- $Im(\omega) > 0$: $1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} < 0$
für $k_{\parallel}/k_{\perp} \gg 1$ (quasi-parallel) und $Re(\omega) = 0$
 $\curvearrowright \beta_{\parallel} > \beta_{\perp} + 2$ notwendige Bedingung!



4 Zusammenfassende Bemerkungen

- Instabilitäten brauchen eine Quelle; d.h. Bedingungen abseits des thermodynamischen Gleichgewichts.
- Anwachsene Feldamplituden korrespondieren mit wachsenden Feldenergien.
- Feldenergien müssen anzapfbares Reservoir haben; anzapfbar heißt aber wiederum jenseits eines thermodynamischen Gleichgewichts
- Im Falle konkurrierender Instabilitäten gilt: höhere Anwachsrate setzt sich durch
- Vgl. Instabilitäten im Alltag, Ökonomie, Gesellschaft

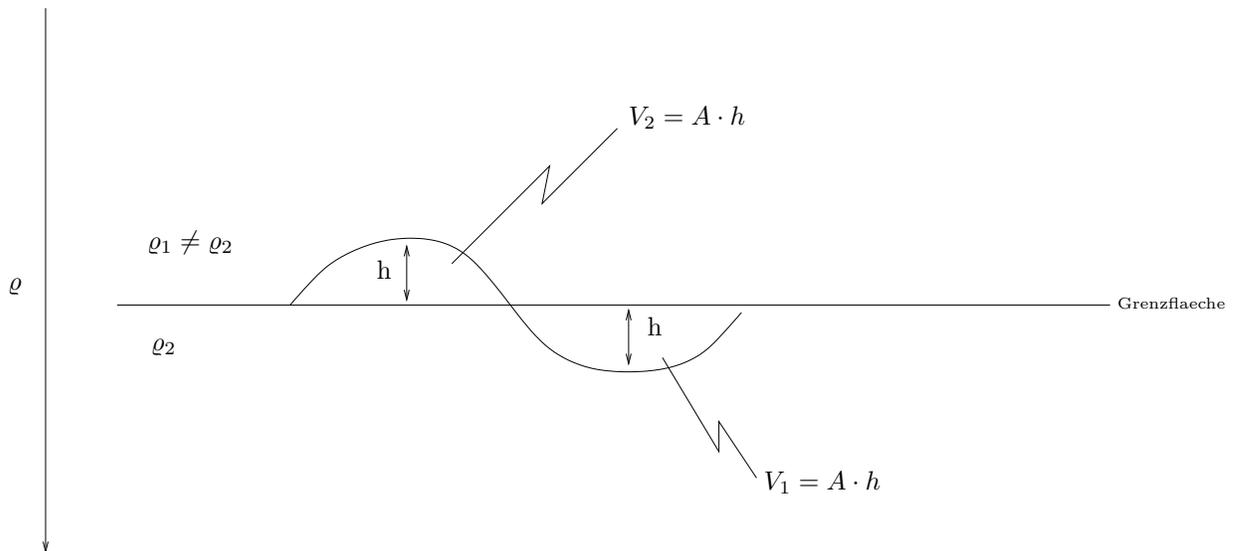
KAPITEL VI

Ortsraum-Instabilitäten (Makroinstabilitäten)

- Nicht nur im Geschwindigkeitsraum treten Gradienten auf, sondern insbesondere auch im Ortsraum
- Beispiele sind:
 - Druckgradienten
 - Dichtegradienten
 - Geschwindigkeitsscherungen
 - usw.
- Generell muss man fragen, ob die mit diesen Ortsraumgradienten einhergehenden physikalischen Situationen überhaupt stabil sind?
- Denn merke: Grundsätzlich darf man nicht voraussetzen, dass ein physikalischer Zustand stabil ist!

1 Die Rayleigh-Taylor-Instabilität

↪ ist eine Situation mit Dichtegradient im Schwerfeld g



- Betrachte harmonische Störung der Grenzfläche, d.h. Auslenkung um Höhe h über Fläche A
- Diese Auslenkung ist mit einer Änderung der potentiellen Energien verbunden:

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= -\rho_1 \cdot g \cdot v = -\rho_1 \cdot g \cdot h \cdot A \\ \delta W_2 &= -\rho_2 \cdot g \cdot h \cdot A \end{aligned} \quad (6.1)$$

- Damit ergibt sich für die gesamte Änderung der Energie:

$$\delta W = \delta W_2 - \delta W_1 = (\rho_2 - \rho_1) \cdot g \cdot A \cdot h \quad (6.2)$$

- Nun gilt der Energieerhaltungssatz:

$$W = \text{konst.} \Rightarrow \begin{cases} \delta W < 0: & \text{potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt} \\ \delta W > 0: & \text{und ?vice? versa} \end{cases}$$

- Also: Falls $\delta W < 0$, d.h. für die Situation mit $\rho_1 > \rho_2$, ist die Grenzfläche instabil.
- Beispiel: Salzstöcke wie unter dem Nussberg oder unter der Asse sind instabile Gebilde, da die Dichte von Salz mit $2,17 \frac{g}{cm^3}$ deutlich geringer ist als die von z.B. Sandstein mit ca. $2,5 \frac{g}{cm^3}$.

↪ Dann versucht die leichtere Materie über die schwerere zu kommen.

- Nicht-lineare Entwicklung \Rightarrow Film
Sobald die Instabilität los geht, wird sie auch bald schon nicht-linear!
- Lineare Instabilitätsanalyse
↪ Normal-Moden-Analyse \Rightarrow U.M.
- Wichtig: Prüfe den Grundzustand!
Existiert der überhaupt?

- Betrachte dazu z.B. folgende Bewegungsgleichung des warmen MHD-Plasmas:

$$\rho \cdot d_t \underline{v} = \underline{j} \times \underline{B} - \partial_x p \tag{6.3}$$

Grundzustand: $d_t \underline{v} = 0$

↪

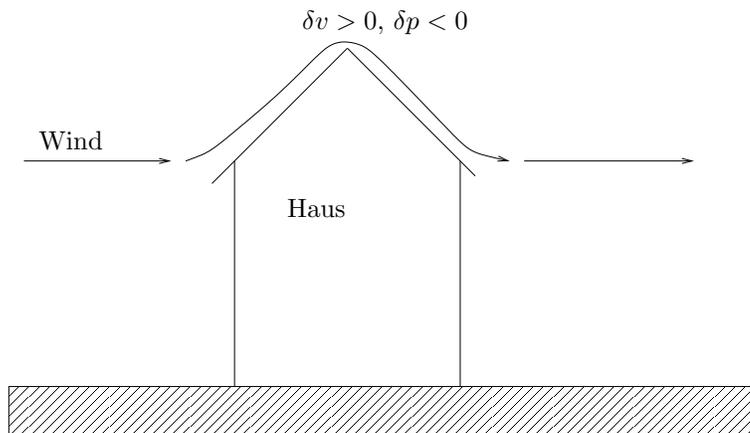
$$\underline{j}_0 \times \underline{B}_0 = \partial_x p_0 \tag{6.4}$$

Dieser Grundzustand muss existieren!

- Diesen existierenden Grundzustand stört man jetzt und betrachtet die Entwicklung

2 Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität

- Physikalisches Bild bzw. analoge Situation:



Für den Wind stellt das Haus eine Verringerung des Strömungs-Querschnitts dar. Die Erhaltung des Massenflusses erfordert daher eine Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit, damit bei vermindertem Querschnitt entsprechend viel Masse um das Haus gelenkt wird.

⇒ „In der Baustelle sollte man schneller fahren, damit kein Stau entsteht“

- Nun gilt der Satz von Bernoulli:

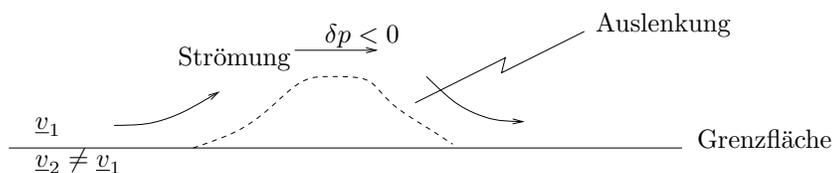
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = const. \tag{6.5}$$

↪ Falls v zunimmt, muss p abnehmen

↪ oberhalb des Daches hat man Druckstörung $\delta p < 0$

⇒ Dach wird wegen Unterdruck angehoben und abgedeckt.

- Übertragung auf Situation an z.B. der Magnetopause



↪ Dort, wo Strömungsquerschnitt an der Grenzfläche verengt wird, tritt Situation mit $\delta p < 0$ auf.

⇒ Grenzfläche wird instabil

- Theoretische Behandlung:
Betrachte in der MHD-Näherung zwei Medien unterschiedlicher Dichte in relativer Strömung, d.h. $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v} \neq 0$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \underline{v}_1, \varrho_1, \underline{B}_1 \\ \hline \text{Grenzfläche} \\ \longrightarrow \underline{v}_2 \neq \underline{v}_1, \varrho_2 \neq \varrho_1, \underline{B}_2 \neq 0 \end{array}$$

- Frage:
Ist diese Situation mit Scherströmung stabil?
- Annahme:
Plasma sei stabil, d.h. $\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B}$ und inkompressibel, d.h. $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{v} = 0$ und homogen in den beiden Halbräumen oberhalb und unterhalb der Grenzfläche.
- Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\varrho \cdot d_t \underline{v} = \underline{j} \times \underline{B} - \partial_{\underline{x}} p \quad (6.3)$$

bzw. in 1. Näherung (wir nehmen an, dass der Grundzustand existiert)

$$\varrho_0 \cdot d_t \underline{v}_1 = \underline{j}_1 \times \underline{B}_0 + \underline{j}_0 \times \underline{B}_1 - \partial_{\underline{x}} p_1 \quad (6.6)$$

- Definiere nun die Auslenkung $\underline{\varepsilon}$ der Grenzfläche aus der Gleichgewichtslage durch

$$\partial_t \underline{\varepsilon} = \underline{v} \quad (6.7)$$

- Dann gilt (6.6) und $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1 = \mu_0 \underline{j}_1$ bzw. $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_0 = \mu_0 \underline{j}_0$

$$\varrho_0 \cdot \partial_t^2 \underline{\varepsilon} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1) \times \underline{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_1 - \partial_{\underline{x}} p_1 \quad (6.8)$$

- Mit $\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \times (\underline{v} \times \underline{B}_0) = -\partial_t \underline{B}_1$ hat man

$$\underline{B}_1 = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{\varepsilon} \times \underline{B}_0) \quad (6.9)$$

- Bilde nun $\partial_{\underline{x}} \cdot$ von (6.8), sodass folgt:

$$\partial_{\underline{x}} \cdot (\varrho_0 \cdot \ddot{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \partial_{\underline{x}} [(\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1) \times \underline{B}_0] + \frac{1}{\mu_0} \times \partial_{\underline{x}} [(\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_1] - \Delta p_1 \quad (6.10)$$

- Daraus lässt sich nach Rechnung die folgende Beziehung für die gesamte Druckstörung

$$\tilde{p} = \frac{b \cdot B_0}{\mu_0} + p_1 \text{ ableiten:}$$

$$\Delta \tilde{p} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \partial_{\underline{x}} [(\underline{B}_0 \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B}_1 + (\underline{B}_1 \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B}_0] - \partial_{\underline{x}} (\varrho_0 \ddot{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.11)$$

- Weitere Annahme: $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_0 = 0 \curvearrowright \underline{j}_0 = 0$
- Damit und wegen der Annahme eines homogenen, inkompressiblen Plasmas mit $\partial_{\underline{x}} \underline{v} = \partial_{\underline{x}} \underline{\varepsilon} = 0$ folgt für die Druckstörung in der Grenzfläche

$$\Delta \tilde{p} = 0 \quad (6.12)$$

- Lösungsansatz: $\tilde{p} = \tilde{p}_0 \cdot \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t)$
- Damit dann aus (6.12)

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad \curvearrowright \quad k_z = i \cdot \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (6.13)$$

Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass für die Flächennormale gilt: $\underline{n} = (0, 0, 1)$, d.h. die z-Achse zeigt weg von der Grenzfläche.

- Also hat man Oberflächenwelle mit

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 \cdot e^{-k_z \cdot z} \cdot \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t) \quad (6.14)$$

- Benötigt wird noch eine Beziehung für $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{B}_1 = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{\varepsilon} \times \underline{B}_0) = (\underline{B}_0 \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{\varepsilon} \quad (6.15)$$

woraus mit der obigen Ansatz folgt

$$\underline{B}_1 = i(\underline{k} \cdot \underline{B}_0) \underline{\varepsilon} \quad \underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

- Weitere Annahme zur Vereinfachung

$$\underline{B}_{0,1} = \underline{B}_{0,2}$$

- Betrachte nun nochmal die Bewegungsgleichung

$$\varrho_0 \cdot \partial_t^2 \underline{\varepsilon} = \frac{1}{\mu_0} \cdot (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1) \times \underline{B}_0 - \partial_{\underline{x}} p_1 \quad (6.16)$$

$$\curvearrowright [(\varrho_0 \mu_0 \cdot \omega^2 - (\underline{k} \cdot \underline{B}_0)^2)] \underline{\varepsilon} = \mu_0 \cdot \partial_{\underline{x}} \tilde{p}$$

wo der Ansatz und Relation (6.15) genutzt wurde.

- Für die Auslenkung der Grenzfläche gilt dann:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\partial_{\underline{x}} \tilde{p}}{\varrho(\omega^2 - [\underline{k} \cdot \underline{v}_A]^2)} \quad (6.17)$$

mit

$$\underline{v}_A = \underline{B}_0 / \sqrt{\mu_0 \varrho_0}$$

- Mit den Beziehungen (6.12) und (6.17) haben wir nun Ausdrücke für die Druckstörung und Auslenkung auf beiden Seiten der Grenzfläche.

- Randbedingungen:

1. Kontinuität von ε_z , der Normalenkomponente von $\underline{\varepsilon}$

2. Kontinuität von $\partial_x \tilde{p}$, der Normalenkraft auf Grenzfläche

- Annahmen:

$z > 0 \Rightarrow$ Region 2

$z < 0 \Rightarrow$ Region 1

$\underline{u}_0 = \underline{v}_{0,2} - \underline{v}_{0,1} \Rightarrow$ relativer Drift der beiden Halbräume

$\omega_2 = \omega$

$\omega_1 = \omega - \underline{k} \cdot \underline{u}_0 \Rightarrow$ Dopplerverschiebung wegen des relativen Drifts

- Betrachte zunächst Kontinuität von ε_z ; diese gewährleistet übrigens, dass zwischen den Halbräumen keine Lücke entsteht...

$$\frac{(\partial_x \tilde{p}_1)_z}{\varrho_{0,1}[\omega_1^2 - (\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_1^2]} = \frac{(\partial_x \tilde{p}_2)_z}{\varrho_{0,2}[\omega_2^2 - (\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_2^2]} \quad (6.18)$$

dann die von $\partial_x \tilde{p}$

$$(\partial_x \tilde{p}_1)_z = -(\partial_x \tilde{p}_2)_z \quad (6.19)$$

- Aus (6.18) und (6.19) mit den Annahmen

$$\frac{1}{\varrho_{0,1}[(\omega - \underline{k} \cdot \underline{u}_0)^2 - (\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_1^2]} + \frac{1}{\varrho_{0,2}[\omega^2 - (\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_2^2]} = 0$$

woraus nach Rechnung eine quadratische Gleichung für $\omega(\underline{k})$ folgt:

$$\omega^2 - \frac{2\varrho_{0,1}}{\varrho_{0,1} + \varrho_{0,2}} \cdot (\underline{k} \cdot \underline{u}_0)\omega - \frac{\varrho_{0,2}}{\varrho_{0,1} + \varrho_{0,2}} \cdot (\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_2^2 + \frac{\varrho_{0,1}}{\varrho_{0,1} + \varrho_{0,2}} \cdot [(\underline{k} \cdot \underline{u}_0)^2 - (\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_1^2] = 0 \quad (6.20)$$

- Lösungsdiskussion

$$\omega_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$\curvearrowright \quad \omega \in \mathbb{C}, \text{ falls } \frac{p^2}{4} < q$

d.h. falls $\frac{p^2}{4} < q$, dann ist die Lösung imaginär, d.h. $\omega = \omega_R + i\gamma$ und mit $\gamma > 0$ möglicherweise instabile Situation

- Beachte noch: Falls $|\underline{u}_0| = 0$, dann ist auch $q = 0 \curvearrowright \omega \in \mathbb{R}$, d.h. nur oszillatorische Lösungen sind möglich.

\curvearrowright Grenzfläche ist nur instabil, falls $|\underline{u}_0| \neq 0!$ Die relative Strömung treibt also nur die Instabilität.

- Notwendige Bedingung für Instabilität:

$$\frac{p^2}{4} < q \implies (\underline{k} \cdot \underline{u}_0)^2 > \left(\frac{1}{\varrho_{0,1}} + \frac{1}{\varrho_{0,2}} \right) \cdot [\varrho_{0,1}(\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_1^2 + \varrho_{0,2}(\underline{k} \cdot \underline{v}_A)_2^2] \quad (6.21)$$

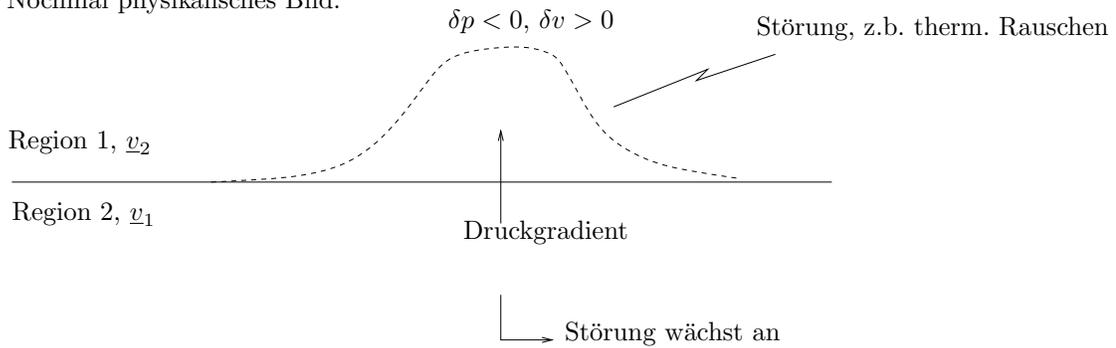
- Diskussion der notwendigen Bedingungen:

– Grenzschicht ist instabil, falls relative Strömung zwischen den Halbräumen ausreichend groß ist

- Anwachsende, d.h. instabile Moden sollten sich parallel zu \underline{u}_0 ausbreiten, da dann $(\underline{k} \cdot \underline{u}_0)$ den größten Wert annimmt.
- Anwachsende Moden sollten sich \perp zu \underline{B}_0 ausbreiten, da dann die rechte Seite von (6.21) klein ist.
- Magnetische Spannung stabilisiert also die Grenzfläche, denn für $\underline{k} \perp \underline{B}_0$ existiert keine Krümmung der Feldlinien.

Vergleich: Oberflächenspannung im Wasser-Luft-Grenzfläche Fall

- Nochmal physikalisches Bild:



- Genauere Rechnung liefert dann auch

$$\gamma(\underline{k})$$

Es gibt viele Wellen mit unterschiedlichen \underline{k} 's, die anwachsen können.

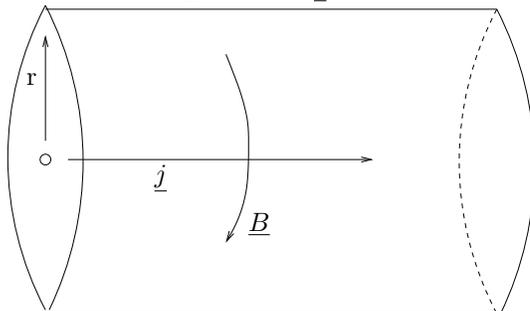
⇒ Die Mode gewinnt, die am schnellsten anwächst.

- Instabilität, d.h. anwachsende Mode, baut relative Drift ab und homogenisiert Plasma
- Nicht-lineare Entwicklung
Folien

3 Pinch-Instabilitäten

3.1 Der lineare Pinch

- Situation mit $\partial_x \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \neq 0$



$$\underline{j} = (0, 0, j_z)$$

$$\underline{B} = (0, B_\theta, 0)$$

In MHD-Näherung gilt für den statischen LP:

$$\underline{j} \times \underline{B} = \partial_{\underline{x}} p \quad (6.22)$$

$$\curvearrowright \quad d_r p = -\frac{B_\theta}{\mu_0 r} \cdot d_r(r B_\theta) \quad (6.23a)$$

oder

$$d_r p = -j_z(r) B_\theta(r) \quad (6.23b)$$

- Gesamtstrom im Teilzylinder $r \leq r_0$

$$I_z(r) = \int_0^r j_z(\varrho) \cdot 2\pi \varrho^2 d\varrho \quad (6.24)$$

bzw.

$$d_r I_z(r) = 2\pi \cdot r \cdot j_z(r)$$

- Für $B_\theta(r)$ gilt (Linienstromfeld)

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_z(r) \quad (6.25)$$

- Damit dann aus (6.23b)

$$d_r p = -\frac{\mu_0}{4\pi^2 r^2} \cdot I_z(r) \cdot d_r I_z(r)$$

oder

$$4\pi^2 r^2 \cdot d_r p(r) = -d_r \left(\frac{1}{2} \mu_0 I_z^2(r) \right) \quad (6.26)$$

- Integration von $r = 0$ bis $r = r_0$ liefert

$$4\pi^2 r^2 \cdot p(r)|_0^{r_0} - 4\pi \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot p(r) dr = -\frac{1}{2} \mu_0 I_0^2$$

mit $I_0 = I_z(r = r_0)$; $I_z(r = 0) = 0$

- Beachte: Für Säule mit eingeschlossenem Plasma gilt: $p(r) = 0$ für $r \geq r_0$
- Für den Gesamtstrom gilt dann

$$I_0^2 = \frac{8\pi}{\mu_0} \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot p(r) dr \quad (6.27)$$

- Plasma bestehe aus Elektronen und Protonen mit den Temperaturen T_e und T_p und es gelte

$$p_{e,p} = n_{e,p}(r) \cdot k_B \cdot T_{e,p}$$

$$n_{e,p} = n_{e,p}(r)$$

$$T_{e,p} \neq T_{e,p}(r)$$

- Mit $p = p_p + p_e$ gilt dann

$$I_0^2 = \frac{8\pi}{\mu_0} k_B \cdot (T_e + T_p) \cdot \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot n(r) dr$$

$n_e = n_p \implies$ Quasi-Neutralität

- Und damit

$$I_0^2 = \frac{8\pi}{\mu_0} k_B \cdot (T_e + T_p) \cdot N_e \quad (6.28)$$

Benett-Beziehung

mit der Säulendichte $N_e = \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot n(r) dr$

- Die Benett-Beziehung gibt den erforderlichen Gesamtstrom an, der im von I_0 erzeugten Magnetfeld eingeschlossenen Plasma fließen muss, damit Plasma auch wirklich eingeschlossen ist
 \implies Grundzustand Tokamak

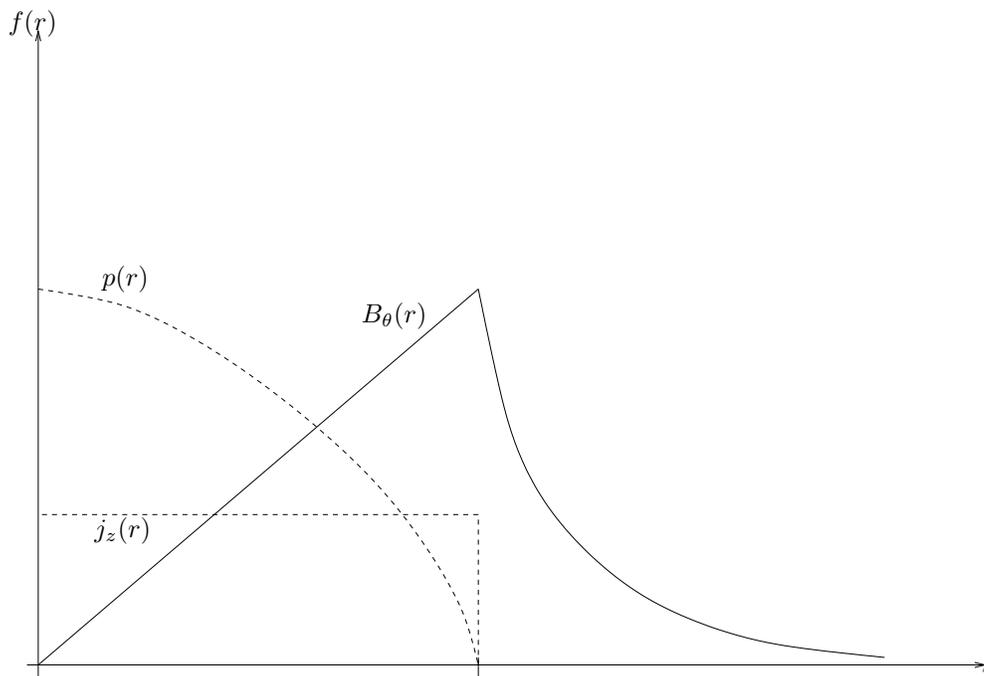
- Beispiel:

$$\begin{aligned} N_e &\sim 10^{19} m^{-1} \\ T_p + T_e &\sim 10^8 k \implies I_0 \sim 10^6 A! \end{aligned}$$

- Radiale Verteilung von $p(r)$ und $B_\theta(r)$, falls $j_z(r) = const$ im Pinch

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi^2 r_0^2} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \\ B_\theta &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_0^2} \cdot r \quad ; \quad r < r_0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

- Graphisch



- Frage: Sind Pinch-Strukturen stabil?

- Gleichungen 1. Ordnung lauten:

$$\partial_t \varrho_1 + \partial_{\underline{x}}(\varrho_0 v_1) = 0 \quad (6.30)$$

$$\varrho_0 \cdot \partial_t v_1 = -\partial_{\underline{x}} p_1 + \underline{j}_1 \times \underline{B}_0 + \underline{j}_0 \times \underline{B}_1 \quad (6.31)$$

$$\frac{p_1}{\varrho_1} = \gamma \frac{p_0}{\varrho_0} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{p_1}{\varrho_1} \right)^\gamma = \text{const} \quad (6.32)$$

$$\partial_t \underline{B}_1 = \partial_{\underline{x}} \times (v_1 \times \underline{B}_0) \quad (6.33)$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1 = \mu_0 \underline{j}_1 \quad (6.34)$$

- Elimination von ϱ_1 führt auf

$$\frac{\varrho_0}{p_0} \cdot \partial_t p_1 + \gamma \cdot \partial_{\underline{x}}(\varrho_0 v_1) = 0$$

woraus mit $v_1 = \partial_t \underline{\varepsilon}$ und Integration folgt:

$$p_1 = -\gamma p_0 \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon} \cdot \partial_{\underline{x}} p_0 \quad (6.35)$$

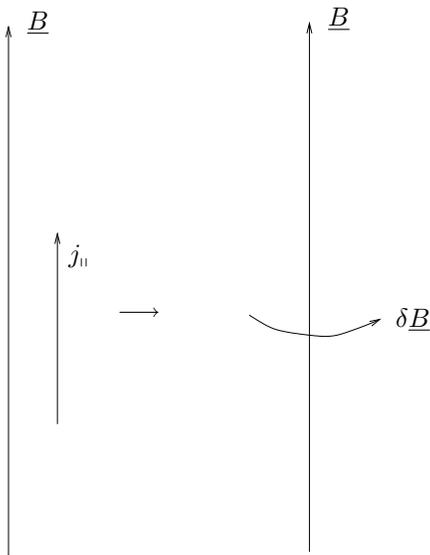
- Bewegungsgleichung formt sich um in

$$\varrho_0 \cdot \partial_t^2 \underline{\varepsilon} = \partial_{\underline{x}}(\underline{\varepsilon} \cdot \partial_{\underline{x}} p_0 + \gamma p_0 \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{\varepsilon}) + \frac{1}{\mu_0} \{ [\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\underline{\varepsilon} \times \underline{B}_0)] \times \underline{B}_0 + (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_0) \times [\partial_{\underline{x}} \times (\underline{\varepsilon} \times \underline{B}_0)] \} \quad (6.36)$$

- Betrachte nun Pinch im idealen Plasma mit der zusätzlichen Annahme, dass im Inneren des Pinches noch ein axiales Magnetfeld anliegt:

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 &= (0, B_\theta, B_z) & r &\leq r_0 \\ \underline{B}_0 &= (0, B_\theta, 0) & r &> r_0 \end{aligned}$$

- Solche Situationen kann man technisch erzeugen; sie kommen aber auch natürlich vor, z.B. in der Magnetosphäre mit feldparallelen Strömen



- Mit $p_1, \underline{\varepsilon} \propto \exp(-i\omega t)$ folgt aus (6.36):

$$-\varrho_0 \omega^2 \underline{\varepsilon} = \gamma p_0 \cdot \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}} \underline{\varepsilon}) + \frac{1}{\mu_0} \{ \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\underline{\varepsilon} \times \underline{B}_0) \} \times \underline{B}_0$$

- Nehme desweiteren Störungen an, die zylindersymmetrisch sind, d.h.

$$\underline{\varepsilon}(\underline{r}) = (\varepsilon_r(r), \varepsilon_\theta(r), \varepsilon_z(r)) \exp(im\theta + ikz)$$

mit $m = 0$

- Dann, nach längerer Rechnung(!), erhält man:

$$\begin{aligned} (k^2 v_A^2 - \omega^2) \varepsilon_r &= (c_s^2 + v_A^2) \cdot d_r \left\{ \frac{1}{r} d_r(r \varepsilon_r) \right\} + ikc_s^2 \cdot d_r \varepsilon_z \\ (k^2 v_A^2 - \omega^2) \varepsilon_\theta &= 0 \\ (k^2 v_A^2 - \omega^2) \varepsilon_z &= c_s^2 \cdot \left\{ \frac{ik}{r} \cdot d_r(r \varepsilon_r) \right\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

- Hier kann man ε_r eliminieren und findet

$$d_r^2 \varepsilon_z + \frac{1}{r} d_r \varepsilon_z - \frac{(k^2 c_s^2 - \omega^2)(k^2 v_A^2 - \omega^2)}{k^2 c_s^2 v_A^2 - \omega^2 (c_s^2 + v_A^2)} \cdot \varepsilon_z = 0 \quad (6.38)$$

Bessel-Gleichung

- Lösung: $\varepsilon_z(r) = I_0(Lr) = J_0(iLr)$

↓

modifizierte Besselfunktion

$$\text{mit } L^2 = k^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{(\omega/k)^4}{c_s^2 v_A^2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \cdot (c_s^2 + v_A^2)} \right\}$$

- und für ε_r dann:

$$\varepsilon_r = \frac{L}{ik} \cdot \left\{ \frac{c_s^2(k^2 v_A^2 - \omega^2) - \omega^2 v_A^2}{c_s^2(k^2 v_A^2 - \omega^2)} \right\} I_0'(Lr)$$

- Lösung für $\varepsilon_\theta \Rightarrow$ Scherung der Feldlinien, d.h. Alfvén-Mode, die stabil ist ($\omega^2/k^2 = v_A^2$) und nicht mit ε_r und ε_z koppelt!

- Dispersionsrelation erhält man nun wieder, wenn man Randbedingungen bei $r = r_0$ beachtet; man erhält nach Rechnung (siehe z.B. Boyd/Sanderson, Plasma Dynamics, 1969)

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_z^2}{\mu_0 \varrho_0} - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \varrho_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{L(\omega) \cdot r \cdot I_0'(Lr)}{I_0(Lr)} \quad (6.39)$$

- Beachte: $L = L(\omega)$, d.h. (6.39) kann nur numerisch gelöst werden!

- Man kann aber zeigen, dass $\omega^2 \in \mathbb{R}$, d.h. komplexe $\omega \in \mathbb{C}$ treten nur auf, falls

$$B_z^2 \leq \frac{B_\theta^2}{(L \cdot r)^2} \cdot \frac{L \cdot r \cdot I_0'(Lr)}{I_0(Lr)}$$

- Beachte: Sonderfall $B_z = 0$
 $\curvearrowright \omega^2 < 0$ kann immer auftreten
 \curvearrowright Pinch ohne Führungsfeld ist immer instabil!
 \Rightarrow axiales Feld stabilisiert!

- Instabilitätstypen

- a) Sausage-Instabilität Folie

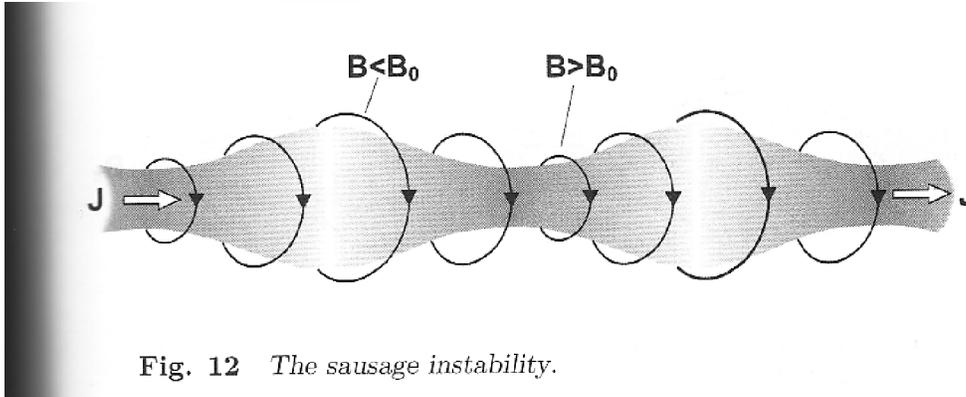
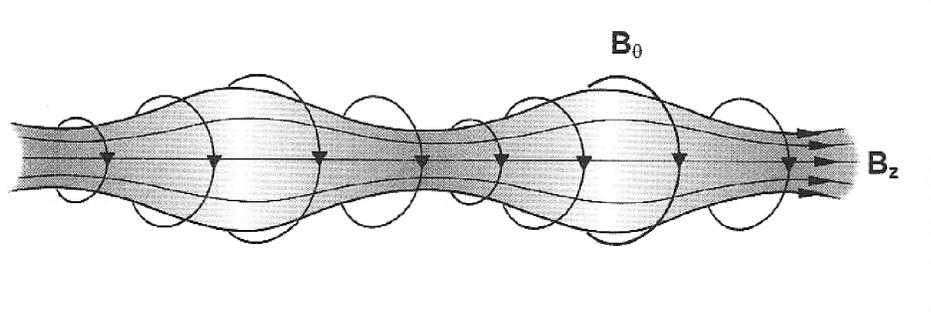


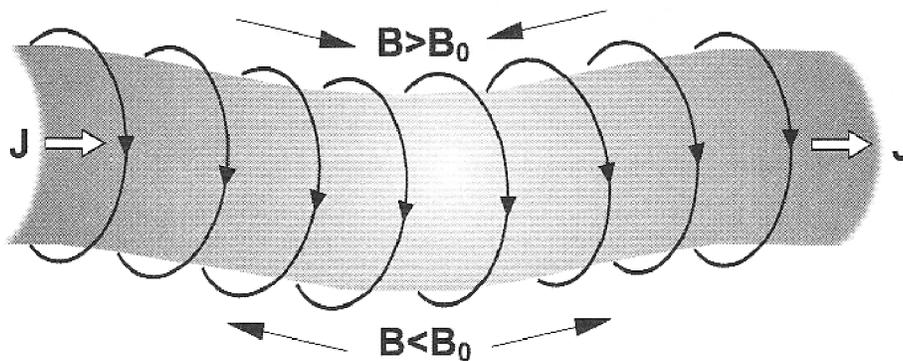
Fig. 12 The sausage instability.

Da $B_\theta \propto \frac{1}{r}$ im Außenraum, wird äußerer magnetischer Druck dort erhöht (erniedrigt), wo Pinch eingeschnürt (aufgeblasen) wird.
 \curvearrowright Störung wächst an!

Axiales Feld stabilisiert, da es mit seinem magnetischen Druck gegen Einschnürung wirkt!

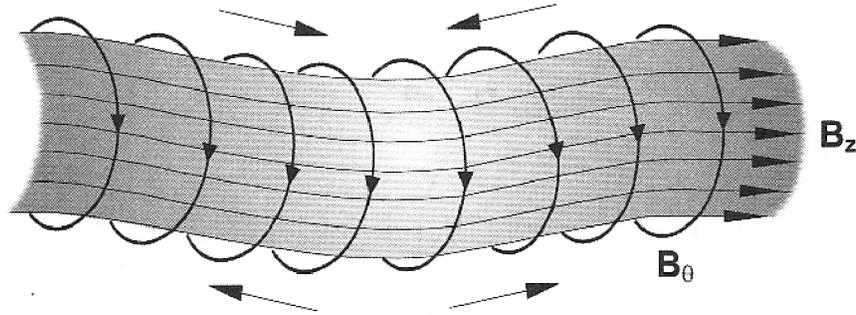


- b) Kink-Instabilität



Auf der konkaven (\smile) Seite der Störung wächst magnetischer Druck und unterstützt kink-Mode; auf der konvexen Seite (\frown) fällt Druck ab
 \Rightarrow Instabilität

Axiales Feld stabilisiert wegen den auftretenden magn. Spannungen



4 Tearing-Mode-Instabilitäten

- Pinch-Instabilitäten
 - ⇒ axialer Strom ⇒ ?toroidales? Feld mit $p_{Mag} \propto \frac{1}{r^2}$
 - ⇒ Variation von p_{Mag} treibt Inst.
- Frage: Sind alle Situationen mit $\underline{j} \neq 0$ instabil?
- Betrachte dazu Rotationsinstabilität mit $\partial_x \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \neq 0$
 - ⇒ unendlich ausgedehnter Schickstrom mit $p_{mag} = const.$
 - ⇒ Pinch-Instabilität greift nicht
- ???Aber: Ein anderer Instabilitätstypen, eben die sog. Tearing-Mode greift???
- Grundzustand: Harris-Stromschicht

$$\underline{j}_0(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \text{sech}^2\left(\frac{x}{d}\right)$$

$$B_0(x) = \tanh\left(\frac{x}{d}\right)$$

ist konsistente Lösung des Vlasov-Maxwell-Systems

- Prinzip der Instabilität: Stromfadenbild



Clustering von Stromfäden

Folie

- Wachstumsrate

$$\gamma_{\text{Tearing}} \approx 0,6\eta^{1/2} \quad \eta = 1/\sigma \quad (6.40)$$

- Notwendige Bedingung für Instabilität:

$$\Delta = \frac{2}{d} \left(\frac{1}{kid} - kid \right)$$

d : Dicke der Schicht

k : Wellenzahl

$\Delta > 0$: Instabilität

$\Delta < 0$: Stabilität

⇒ Tearing-Mode tritt für große Wellenlängen auf. ergibt physikalisch auch Sinn, da Tearing „kleine“ Struktur abbauen und große schaffen will.

- Detaillierte Lösung liefert auch

$$\omega \in \mathbb{I}$$

d.h. rein anwachsende Mode!

- Wachstumsrate ist allerdings klein, d.h. während des Anwachsens kann \underline{B} -Feld durch Plasma diffundieren (Beachte: σ endlich)
 ↷ Rekonnexion ist möglich
- Bedeutung endl. σ :
 ⇒ ermöglicht Umbau magnetischer Energie in magnetische Energie erst

Instabilität nicht-linearer Wellen

- Betrachte Störung großer Amplitude im kalten Plasma:

$$\begin{aligned} \rho \cdot d_t \underline{v} &= \underline{j} \times \underline{B} \\ \leadsto \rho \cdot d_r \underline{v} + \underbrace{\rho \cdot (\underline{v} \cdot \partial_x) \underline{v}}_{\text{NL-Therm in } \underline{v}} &= - \underbrace{\partial_x \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)}_{\text{NL-Therm in B}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} (\underline{B} \cdot \partial_x) \underline{B}}_{\text{NL-Therm in B}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

- Nicht-lineare (NL) Terme verursachen Problem:

Es ist keine lineare Superposition mehr möglich! Betrachte dazu z.B. Term $|\underline{B}| \propto \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$ und Ausdruck mit B^2 .

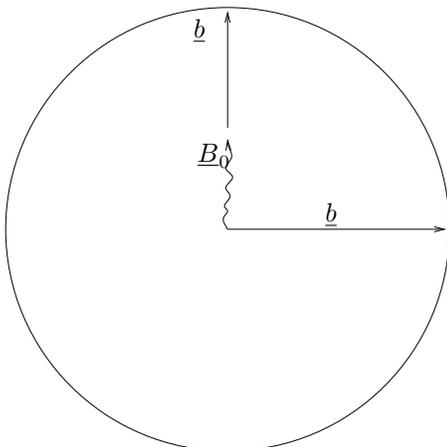
$$\begin{aligned} \leadsto B^2 &\propto \sin \alpha \cdot \sin \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2 \\ \leadsto B^2 &\propto (1 - \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t))/2 \end{aligned}$$

d.h. es taucht Term mit z.B. doppelter Frequenz auf

- Und die DGL algebraisiert nicht mehr!
- Beachte aber: Alfvén-Mode mit $b \geq B_0$ ist auch Lösung der nicht-linearisierten Gleichung! Es gilt weiterhin:

$$|\underline{B}| = |\underline{B}_0 + \underline{b}| = \text{konst.}$$

d.h. Magnetfeldvektor der NL-Alfvén-Mode liegt immer auf Oberfläche einer Kugel



Frage: Wie sieht $b_x(t)$ bzw. $b_z(t)$ aus?

- Problem: Ist MHD-Welle großer Amplitude stabil, d.h. gibt sie durch Welle-Teilchen-WW oder Welle-Welle-WW Energie ab und zerfällt?

- Betrachte dazu nun vereinfachte nichtlineare Wellengleichung

$$d_t^2 \varphi - d_x^2 \varphi \quad \underbrace{+\varphi}_{\text{Term verursacht Dispersion}} = \underbrace{\alpha \varphi^2}_{\text{Nicht-linearer Term}} \quad (7.2)$$

- Lösungsansatz:

$$\varphi(x, t) = \sum_{\nu} A_{\nu}(t) \exp(ik_{\nu}x - i\omega_{\nu}t) \quad (7.3)$$

d.h. Überlagerung ebener Wellen mit Amplitudenmodulation $A_{\nu}(t)$

- Für $\alpha = 0$, d.h. ohne NL-Term erhält man durch Einsetzen von (7.3) in (7.2):

$$-\omega_{\nu}^2 + k_{\nu}^2 + 1 = 0$$

falls $A_{\nu}(t) = \text{const.}$; damit dann

$$\omega_{\nu} = \sqrt{k_{\nu}^2 + 1} \quad (7.4)$$

Dispersionsrelation

\curvearrowright Term „ φ “ bringt echte Dispersion in die Welle

- Nun Ansatz in die volle, nicht-lineare Wellengleichung; sei hier nun $\varphi_0(t) = A_{\nu}(t) \cdot \exp(\dots)$ dann gilt:

$$\begin{aligned} d_t \varphi_{\nu} &= d_t A_{\nu} \cdot \exp(\dots) - i\omega_{\nu} A_{\nu} \cdot \exp(\dots) \\ d_t^2 \varphi_{\nu} &= (d_t^2 A_{\nu} - i2\omega_{\nu} \cdot d_t A_{\nu} - \omega_{\nu}^2 A_{\nu}) \cdot \exp(\dots) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_x^2 \varphi_{\nu} &= -k_{\nu}^2 A_{\nu} \exp(\dots) && \text{Beachte: } A_{\nu} \text{ ist eine Funktion von } \dot{x}! \\ &\stackrel{(7.4)}{\simeq} -(\omega_{\nu}^2 - 1) A_{\nu} \exp(\dots) && \text{Ansatznäherung} \end{aligned}$$

- Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \varphi^2(x, t) &= \alpha (A_1(t) \exp(1) + A_2(t) \exp(2) + \dots) * \\ &\quad (A_1(t) \exp(1) + A_2(t) \exp(2) + \dots) \\ &= \alpha (A_1 \cdot A_1 \exp(i(k_1 + k_1)x - i(\omega_1 + \omega_1)t) + \\ &\quad A_1 \cdot A_2 \exp(i(k_1 + k_2)x - i(\omega_1 + \omega_2)t) + \dots) \end{aligned}$$

- Nun alle Ausdrücke einsetzen in

$$d_t^2 \varphi - d_x^2 \varphi + \varphi = \alpha \varphi^2$$

und Koeffizientenvergleich in $\exp(ik_{\nu}x)$

$$\begin{aligned} \curvearrowright [d_t^2 A_{\nu} - i2\omega_{\nu} \cdot d_t A_{\nu} - \omega_{\nu}^2 A_{\nu} + \omega_{\nu}^2 A_{\nu} - A_{\nu} + A_{\nu}] \cdot \exp(-i\omega_{\nu}t) \\ = \alpha \sum_{k_{\alpha} + k_{\beta} = k_{\nu}} A_{\alpha} A_{\beta} \exp(-i(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) \cdot t) \end{aligned}$$

- Und damit dann

$$d_t^2 A_\nu - i2\omega_\nu \cdot d_t A_\nu = \alpha \sum_{k_\alpha + k_\beta = k_\nu} A_\alpha A_\beta \exp(-i(\omega_\nu - \omega_\alpha - \omega_\beta) \cdot t) \quad (7.5)$$

- Betrachte zum Vergleich erzwungene Schwingung

$$d_t^2 x + 2\gamma \cdot d_t x + \omega_0^2 x = k \cos \omega t \quad (7.6)$$

⇒ Resonanz, falls $\omega = \omega_0$

- Nun Vergleich zu (7.5) ↷

NL-WW-Term

mit

$\omega = \omega_\nu - \omega_\alpha - \omega_\beta$ beschreibt anregende Kraft

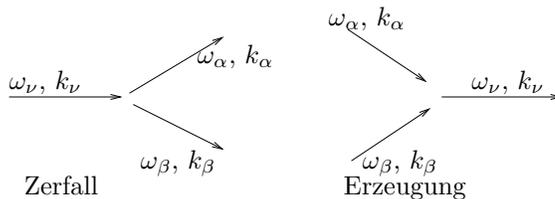
und wir haben „Resonanz“, falls

$$\omega_0 = 0 = \omega = \omega_\nu - \omega_\alpha - \omega_\beta$$

- Also, eine nicht-lineare, resonante WW tritt auf, falls

$$\begin{aligned} \omega_\alpha + \omega_\beta &= \omega_\nu && \text{Energiesatz} \\ \text{und} &&& \\ k_\alpha + k_\beta &= k_\nu && \text{Impulssatz} \end{aligned} \quad (7.7)$$

- D.h. wir sehen, dass eine nichtlineare Welle zerfallen oder auch aus zwei anderen Wellen durch deren WW entstehen kann



- Beachte: Die Bedingungen (7.7) sind notwendige Bedingungen, keine hinreichenden!

Denn $\omega = \omega(k)$, d.h. auch Dispersion muss mitspielen

„Heiraten möchte jeder, aber der Partner kann fehlen“

- Anwendung auf MHD-Wellen

$\underline{k}_1 \implies$ zirkular polarisierte Alfvén-Welle, vorwärtslaufend

$\underline{k}_2 \implies$ zirkular polarisierte Alfvén-Welle, rückwärtslaufend

$\underline{k}_3 \implies$ Ionen-akustische Welle, $\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{k_B T_e}{m_i}$

- Beispiel Goldstein, Astrophys. J., 219, 700-704, 1978

– Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_{\underline{x}}(\varrho \underline{v}) &= 0 \\ \varrho \cdot \partial_t \underline{v} + \varrho(\underline{v} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{v} &= -\partial_{\underline{x}} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B} \\ \partial_t \underline{B} &= -\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}} \underline{v} + (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B} \\ p &= c_s^2 \varrho \end{aligned} \quad (7.8)$$

- Problem: studiere Stabilität einer zirkular polarisierten Alfvén-Welle großer Amplitude

$$v_{\perp} = \pm \frac{B_{\perp}}{\sqrt{\mu_0 \varrho}}$$

- Weitere Annahmen: „Slab geometry“, d.h. räumliche Variation nur in z-Richtung $\parallel \underline{B}_0$.
Kleine Fluktuationen im Plasma bereits vorhanden, d.h. „thermisches Rauschen“.
- Damit

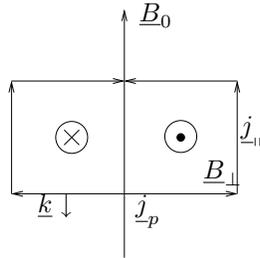
$$\begin{aligned} \varrho(z, t) &= \varrho_0 + \varrho'(z, t); \text{ gestrichene Größen } \Rightarrow \text{Haise} \\ \underline{v}(z, t) &= v_{\perp}(z, t) + v'_{\perp}(z, t) + v'_z(z, t) \\ \underline{B}(z, t) &= B_0 \underline{e}_z + \underbrace{\underline{B}_{\perp}(z, t)}_{\text{zirk. pol. Welle}} + \underline{B}'_{\perp}(z, t) \end{aligned}$$

- Einsetzen in Ausgangsgleichung liefert

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \varrho' - c_s^2 \partial_z^2 \varrho' &= \frac{1}{\mu_0} \partial_z^2 (\underline{B}_{\perp} \cdot \underline{B}'_{\perp}) \\ \partial_t^2 \underline{B}'_{\perp} - v_A^2 \partial_z^2 \underline{B}'_{\perp} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} (v'_z \underline{B}_{\perp}) - B_0 \cdot \partial_z (v'_z \partial_z v_{\perp}) - \frac{B_0}{\varrho_0} \cdot \partial_z (\varrho' \cdot \partial_t v_{\perp}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Zwei Gleichungen, deren rechte Seiten, abh. von \underline{B}_{\perp} (Pumpwelle), die Anregung von Störungen ϱ' und \underline{B}'_{\perp} beschreiben

- Betrachtung zum Term $\partial_z^2 \underline{B}_{\perp} \cdot \underline{B}'_{\perp}$:
falls $\underline{B}_{\perp} = \underline{B}'_{\perp}$, dann ist dies eine sogenannte ponderomotorische Kraft



$$\begin{aligned} \underline{j}_p &= (j_p, 0, 0) \\ \underline{B}_{\perp} &= (0, -B_{\perp}, 0) \\ \hookrightarrow \underline{j}_p \times \underline{B}_{\perp} &= (0, 0, -j_p B_{\perp}) \end{aligned}$$

d.h. Welle wechselwirkt mit sich selber und bewirkt Kraft in Ausbreitungsrichtung
 \Rightarrow Strahlungsdruck $\partial_x B_{\perp}^2$

- Lösungsansatz, reeller Ansatz mit $\exp(i\alpha)$

$$\underline{B}_{\perp}(z, t) = \frac{1}{2} \{ B \exp[-i(k_0 z - \omega_0 t)] \underline{e}_{\pm} + B^* \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \underline{e}_{\pm} \}$$

Ansatz für
 \underline{B}'_{\perp} entsprechend
mit ω und k

$$\begin{aligned} B &\in \mathbb{C}; B^* \text{ konj. Komplex} \\ \underline{e}_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_x \pm i \underline{e}_y) \text{ links bzw. rechts zirkular polarisierte Welle} \end{aligned}$$

Weiter nehme an: $v_{\perp} = \pm \frac{B_{\perp}}{\sqrt{\mu_0 \varrho}}$

- Einsetzen in Störungsgleichung:

$$(-\omega^2 + k^2 c_s^2) \cdot \varrho'(k, \omega) = \frac{-k^2}{2\omega_0} [B B'^*(-k_-, \omega_-) + B^* B'(k_+, \omega_+)] \quad (7.10)$$

usw. für B'_\perp

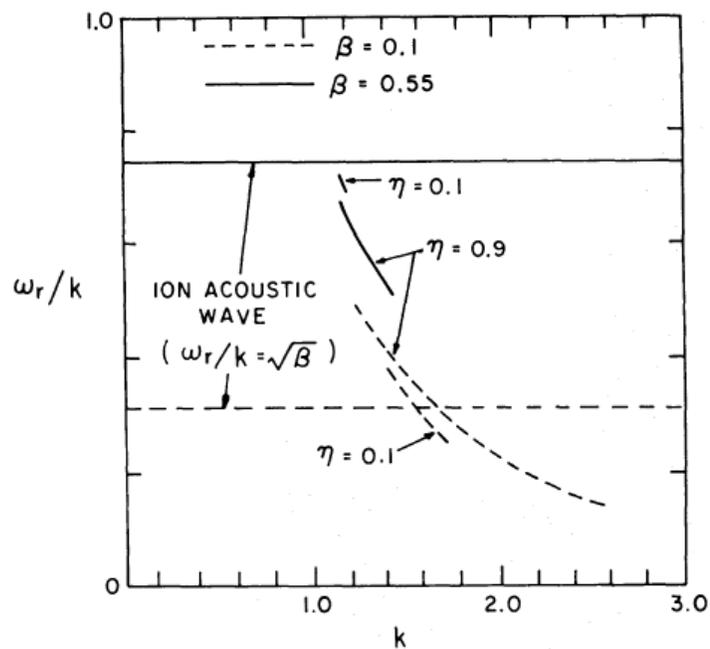
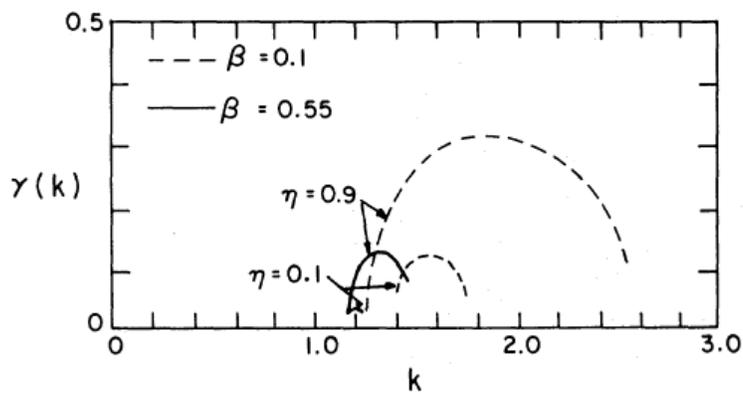
wobei

$$k_\pm = k \pm k_0; \quad \omega_\pm = \omega \pm \omega_0$$

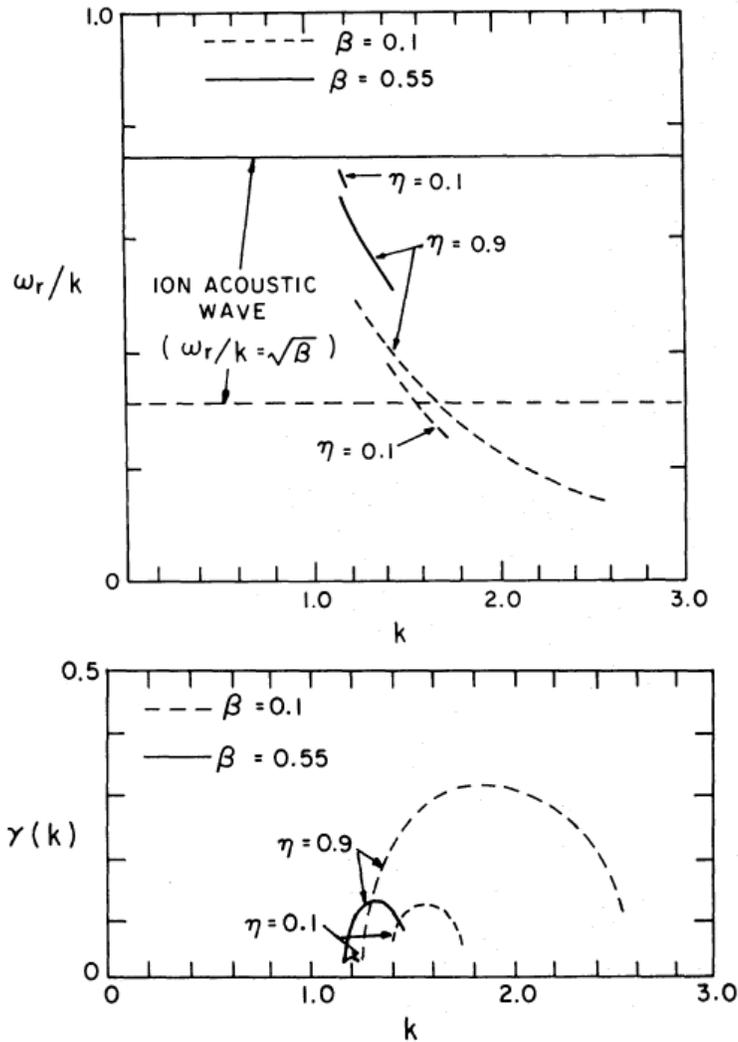
Daraus folgt dann Dispersionsrelation

$$(\omega^2 - \beta k^2)(\omega - k)[(\omega + k)^2 - 4] = \frac{\eta k^2}{2}(\omega^3 + \omega^2 k - 3\omega + k) \quad (7.11)$$

mit $\eta = |B|^2/B_0^2$; $\beta = c_s^2/v_A^2$; $k/k_0 \rightarrow k$; $\omega/\omega_0 \rightarrow \omega$



Stabilität einer zirkular polarisierten Alfvén-Welle großer Amplitude



aus: Goldstein, M.L., Astrophys. J., 219, 700, 1978

- Zur Interpretation:

Die Situation mit $\eta = 0, 1$, d.h. fast linear, liefert nur geringe Anwachsraten; da die Anwachsrate der instabilen Welle die Dämpfungsrates der Pumpwelle ist, ist die Pumpwelle nahezu stabil.

Situation mit $\beta = 0, 1$, d.h. thermischer Druck klein im Vergleich zum magnetischen Druck; für $\eta = 0, 9$, d.h. große Amplitude der Pumpwelle, schneidet Disp. ast der instabilen Welle den Disp. ast der Ionen-akust- Welle \Rightarrow dritter Partner gefunden \Rightarrow Instabilität

- Betrachte nun einige kinetische Effekte:

⇒ Niederfrequente Wellen im Zwei-Komponenten-Plasma, d.h. Gas mit Ionen und Elektronen