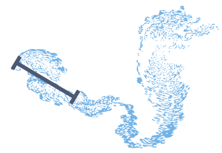
Simulation von Erosion und Sedimenttransport mit Lattice-Boltzmann-Methoden

Maik Stiebler



Motivation

Im Umfeld von Wasserbaukonstruktionen treten lokal erhöhte Strömungsgeschwindigkeiten auf, welche Erosionsvorgänge induzieren. Die Erosion kann im schlimsten Fall zu Kolkbildung führen, die die Standsicherheit der Konstruktion gefährdet. Gegenwärtig werden zur Kolkvorhersage überwiegend konstruktionsspezifische empirische Formeln verwendet. Mit experimentellen Untersuchungen im Kanal können bei größerem Aufwand zufriedenstellende Prognosen gemacht werden, allerdings muss abgesichert werden, dass durch die Skalierung des realen Systems kein erheblicher Fehler eingeführt wird. Infolge steigender Rechnerleistungen werden auch numerische Simulationen zunehmend praktikabel. Hier setzt die Arbeit an. Es wird ein numerisches Modell entwickelt, in dem ein Strömungsgebiet, das mit der Lattice-Boltzmann-Methode diskretisiert wird, mit einem Sedimentfeld interagiert.

Modellgleichungen

Die inkompressible Strömung wird durch die um einen Auftriebsterm erweiterten Navier-Stokes- Gleichungen beschrieben:

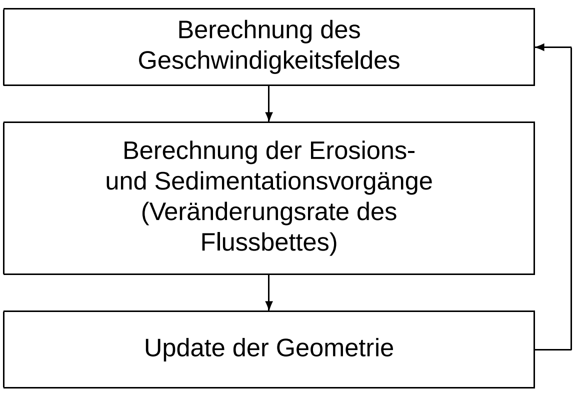
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1\right) c g \delta_{i3}$$

Die Sedimentkonzentration c wird darin mit der Strömungsgeschwindigkeit advektiert, turbulente Wirbel in der Strömung bewirken Diffusion:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \left(u_{j,\mathrm{Fluid}} + u_{j,\mathrm{Sink}}\right)\frac{\partial c}{\partial x_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_c}\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}$$

Das Strömungsfeld ist durch schubspannungsabhängige Sedimentations- und Erosionsraten mit dem Bett gekoppelt:



Flussdiagramm zur Kolkvorhersage mit numerischen Modellen

Lattice-Boltzmann-Methode

Mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren hat sich in den letzten fünfzehn Jahren eine Alternative zur Simulation von inkompressiblen Strömungen auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen entwickelt. Die Methode beruht auf einer mikroskopischen Sichtweise und lässt sich auf das stochastische Verhalten hypothetischer Gasteilchen zurückführen. Die makroskopischen Größen ergeben sich als Momente der Verteilungsdichten f_i (für beispielsweise zweidimensionale Strömungen mit $i = 0, 1, \ldots, 8$) bzgl. der zugehörigen mikroskopischen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{\xi}_i$:

$$\rho = \sum_i f_i, \rho\mathbf{u} = \sum_i f_i \boldsymbol{\xi}_i.$$

Die Verteilungsdichten werden mit den zugehörigen mikroskopischen Geschwindigkeiten advektiert. $\mathbf{F}$ stellt eine äußere Kraft dar.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}_i \cdot \nabla f_i = \Omega_i + \alpha \boldsymbol{\xi}_i \cdot \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{3} c_s \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Einfluss von Teilchenkollisionen wird als eine Relaxation zu einer Gleichgewichtsverteilung modelliert:

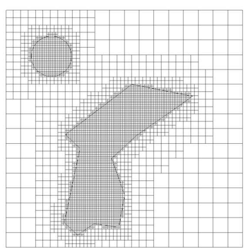
$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{\mathrm{eq}}\right),$$

$$f_i^{\mathrm{eq}} = w_i \rho \left[1 + \frac{1}{c_s^2}(\boldsymbol{\xi}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2c_s^4}(\boldsymbol{\xi}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2c_s^2}\mathbf{u}^2\right]$$

Diskretisierung dieser Gleichung mit einer Finite-Differenzen-Methode und Kopplung von Zeit- und Ortsschritt über die mikroskopische Geschwindigkeit ($\Delta x = \sqrt{3} c_s \Delta t$) führt zum Lattice-Boltzmann-Verfahren:

$$\underbrace{f_i(\mathbf{x} + \Delta t \boldsymbol{\xi}_i, t + \Delta t)}_{\text{Propagation}} = \underbrace{f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau}\left[f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)\right]}_{\text{Kollision}}$$

Hiermit ist ein explizites Verfahren gegeben, in dem die makroskopischen Lösungen den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen (mit $\nu = c_s^2(\tau - .5\Delta t)$ und $p = \rho c_s^2$) folgen. Das Verfahren ist wegen hoher Datenlokalität gut parallelisierbar. Die Kopplung von Zeit- und Ortsschritt erfordert ein kartesisches Rechengitter, es ist aber möglich, Gitter verschiedener Auflösung miteinander zu koppeln.



Kopplung von hierarchisch strukturierten Lattice-Boltzmann-Rechengittern