Möglichkeiten der Begabtenförderung im Mathematik-Unterricht durch natürliche Differenzierung

Frank Förster & Wolfgang Grohmann
Technische Universität Braunschweig
Lessing-Grundschule Braunsbedra

Zur Einstimmung …

Rechnen mit Zifferntausch

Rechnet, indem ihr die Ziffern vertauscht und die Differenz bildet!

Beispiel: 72 – 27 = 45
Die letzte Ziffer im Ergebnis zeigt, in welche Spalte der Tabelle ihr die erste Zahl der Aufgabe schreiben sollt.
45 → 5. Spalte. Die 72 wird in die 5. Spalte geschrieben.

____	____	____	____	72__	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____
____	____	____	____	____	____	____	____	____

Zur Einstimmung …

Rechnen mit Zifferntausch

Rechnet, indem ihr die Ziffern vertauscht und die Differenz bildet!

Beispiel: 72 – 27 = 45
Die letzte Ziffer im Ergebnis zeigt, in welche Spalte der Tabelle ihr die erste Zahl der Aufgabe schreiben sollt.
45 → 5. Spalte. Die 72 wird in die 5. Spalte geschrieben.

_98_	_97_	_96_	_95_	_94_	_93_	_92_	_91_	_90_
_87_	_86_	_85_	_84_	_83_	_82_	_81_	____	____
_76_	_75_	_74_	_73_	_72_	_71_	____	____	____
_65_	_64_	_63_	_62_	_61_	____	____	_____	____
_54_	_53_	_52_	_51_	____	____	____	____	____
_43_	_42_	_41_	____	____	____	____	____	____
_32_	_31_	____	____	____	____	____	____	____
_21_	____	____	____	____	____	____	____	____

Gliederung

0. Ein Beispiel zur Einstimmung ✓
1. Mathematische Begabung
2. Zur Differenzierung
3. Zur Gestaltung von Aufgaben
4. Beispiele für Aufgabensequenzen
5. Das Öffnen von Aufgaben

Fazit

Die mathematische Lernwerkstatt in Braunschweig

- Zielsetzungen
  - Förderung der Schülerinnen und Schüler ☺
  - Ausbildung von Lehramtsstudierenden
  - Plattform unterschiedlicher Forschungsfragen
    - Hier und heute:
      Wie können mathematisch begabte Kinder im „normalen“ Unterricht gefördert werden?

1. Mathematische Begabung

Begabungsbegriff (Käpnick 1998)

- ein individuell unterschiedlich geprägtes spezielles Potential für eine mit großer Wahrscheinlichkeit zu einem späteren Zeitpunkt erreichte überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit
- die jeweils vorhandenen Erbanlagen **und** ein förderliches soziales Umfeld werden als die beiden ausschlaggebenden Komponenten für die Entstehung und die Entwicklung einer mathematischen Begabung angesehen

1. Mathematische Begabung

Besonderheiten mathematisch begabter Kinder (Käpnick 1998)

- Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte im Kurzzeitgedächtnis unter Nutzung erkannter mathematischer Strukturen,
- mathematische Fantasie,
- Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte,
- Fähigkeit im selbständigen Transfer erkannter Strukturen,
- Fähigkeit im selbständigen Wechseln der Repräsentationsebenen und im selbständigen Umkehren von Gedankengängen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben,
- Mathematische Sensibilität

1. Mathematische Begabung

Besonderheiten mathematisch begabter Kinder (Käpnick 1998)

- eine hohe geistige Aktivität,
- intellektuelle Neugier,
- Anstrengungsbereitschaft,
- Freude am Problemlösen,
- Konzentrationsfähigkeit,
- Beharrlichkeit,
- Selbständigkeit und
- Kooperationsfähigkeit

2. Zur Gestaltung von Aufgaben

- Ausgangspunkt: Anforderungen an Aufgaben nach Käpnick (2001)
  - Ausgangs-/Einstiegsaufgabe
    - Wecken von Interesse und Neugierde
    - Leichte Verständlichkeit
    - Ermöglicht Anschlussprobleme
    - Regt Eigenproduktionen an
    - reichhaltige mathematische Substanz

2. Zur Gestaltung von Aufgaben

- Gründe für Veränderungen des Konzepts
  - Grenzen außerunterrichtlichen Enrichments
    - Kinder verbringen die meiste Zeit im Unterricht
    - Ausgeklammert: Akzelerationsprogramme u.a.
  - Rechenschwache und Hochbegabte im gemeinsamen Unterricht
    - (Natürliche) Differenzierung: Anspruch und …
    - … Zeit für die Kinder sich mit Mathematik zu beschäftigen
  - Steigerung der Effizienz von Unterricht
    - Konzentration des Vorbereitungsaufwands auf mathematischen Gehalt
    - Übersichtlichkeit des UR-Prozess für die Lehrkraft

Schreibe jeweils 10 Zahlen.

(14) 7 395 (+ 1)	(16) 16 304 (– 1)	(18) 26 943 (+ 10)	(20) 9 715 (+ 1 000)
(15) 73 093 (+ 1)	(17) 90 004 (– 1)	(19) 47 083 (– 10)	(21) 84 229 (– 100)


Hausaufgabe 21.9.2007

14)	16)	18)	20)
7395	16304	26943	9715
7396	16303	26953	10715
7397	16302	26963	11715
7398	16301	26973	12715
7399	16300	26983	13715
7400	16299	26993	14715
7401	16298	27003	15715
7402	16297	27013	16715
7403	16296	27023	17715
7404	16235	27033	18715

15)	17)	19)	21)
73093	90004	47083	84229
73094	90003	47073	84129
73095	90002	47063	84029
73096	90001	47053	83929
73097	90000	47043	83829
73098	89999	47033	83729
73099	89998	47023	83629
73100	89997	47013	83529
73101	89996	47003	83429
73102	89995	46993	83329

Schreib sauber!

2. Zur Gestaltung von Aufgaben

- **Ergänzungen/Veränderungen**
  - Reduktion auf <u>45 Minuten</u>-Schulstunden
  - Leicht zu <u>lösendes</u> Einstiegsproblem
  - Forcieren <u>probierender Ansätze</u> durch das Einstiegsproblem
  - Planung als <u>Übungsstunden</u> durch die Möglichkeit probierender Lösungsversuche (Übungseffekt)
  - <u>Ausschluss/Minderung einer defizitären Sichtweise</u>: kein Weglassen von Aufgaben für schwache Schülerinnen und Schüler bzw. keine Zusatzaufgaben für stärkere

3. Zur Differenzierung

- Vorteile der Differenzierung innerhalb eines gemeinsamen (ma-)thematischen Rahmens
  - Enrichment ist möglich;
  - Generierung von Ideen durch die Lerngruppe;
  - Diagnostischer Wert, da selbst gewählte Strategien immer <u>sichere Strategien</u> sind und insofern zutage treten;
  - Gezielte Sachanalytische Vorbereitung;
  - Geringere Belastung der Lehrkraft.

3. Zur Differenzierung

- Der Begriff „natürliche Differenzierung“
  - „Im Sinne des aktiv- entdeckenden und sozialen Lernens bietet sich […] eine Differenzierung vom Kinde aus an: Die gesamte Lerngruppe erhält einen Arbeitsauftrag, der den Kindern Wahlmöglichkeiten bietet. Da diese Form der Differenzierung beim »natürlichen Lernen« außerhalb der Schule selbstverständlich ist, spricht man von »natürlicher Differenzierung«.“

(vgl. WITTMANN, MÜLLER 2004, S.15)

4. Das Öffnen von Aufgaben

- Möglichkeiten der Öffnung:
  - Öffnen geschlossener Aufgaben (z.B. aus Schulbüchern ☺)
  - Aufbereitung von „Knobel“-Aufgaben
  - …

S. 49, Nr. 2

$73-5=\boxed{}$

$73-3=70$

$70-2=68$

$73-5=68$

Zeige (färbe) in Hunderterquadraten.

2 73 – 5	8 37 + 8	14 42 – 9	20 28 + 6	26 51 – 7	32 46 + 9
3 64 – 8	9 82 + 8	15 95 – 9	21 47 + 7	27 73 – 7	33 72 + 9
4 31 – 7	10 56 + 8	16 63 – 9	22 86 + 5	28 35 – 7	34 38 + 9
5 96 – 8	11 74 + 8	17 58 – 9	23 35 + 7	29 62 – 7	35 55 + 9
6 47 – 8	12 45 + 8	18 79 – 9	24 64 + 9	30 46 – 7	36 68 + 9
7 24 – 6	13 69 + 8	19 84 – 9	25 79 + 3	31 94 – 7	37 83 + 9

Addition und Subtraktion im Hunderterraum

a) Addiere zur Zahl 36 eine einstellige Zahl.

Bei welchen Zahlen verändert sich die Zehnerstelle?

Subtrahiere von 36 eine einstellige Zahl.

Bei welchen Zahlen verändert sich die Zehnerstelle?

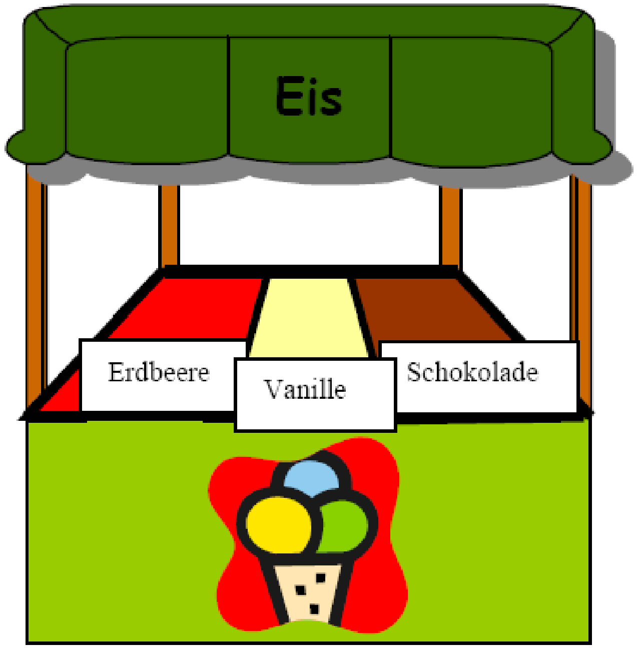
b) Addiere zu einer selbst gewählten Zahl eine einstellige Zahl.

Subtrahiere von dieser selbst gewählten Zahl eine einstellige Zahl.

Bei welchen Zahlen verändert sich die Zehnerstelle?

c) Wie verändern sich deine Ergebnisse, wenn du bei deiner Ausgangszahl die Zehnerstelle veränderst?

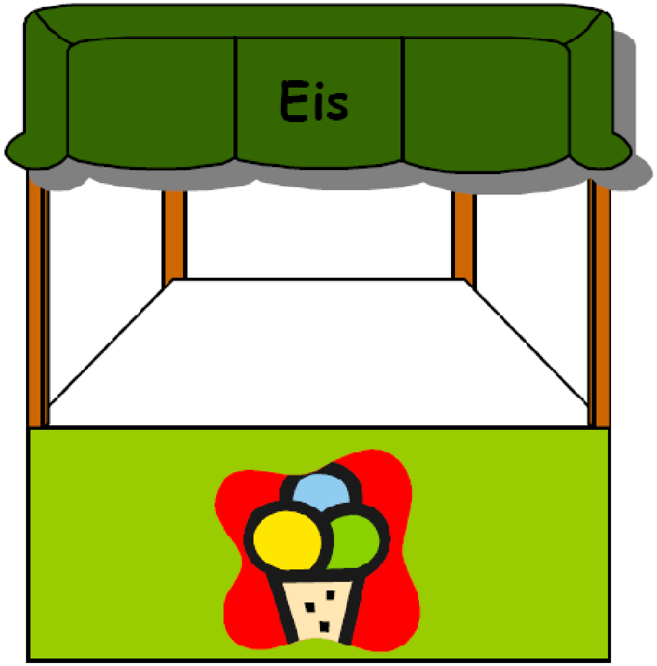
Eis

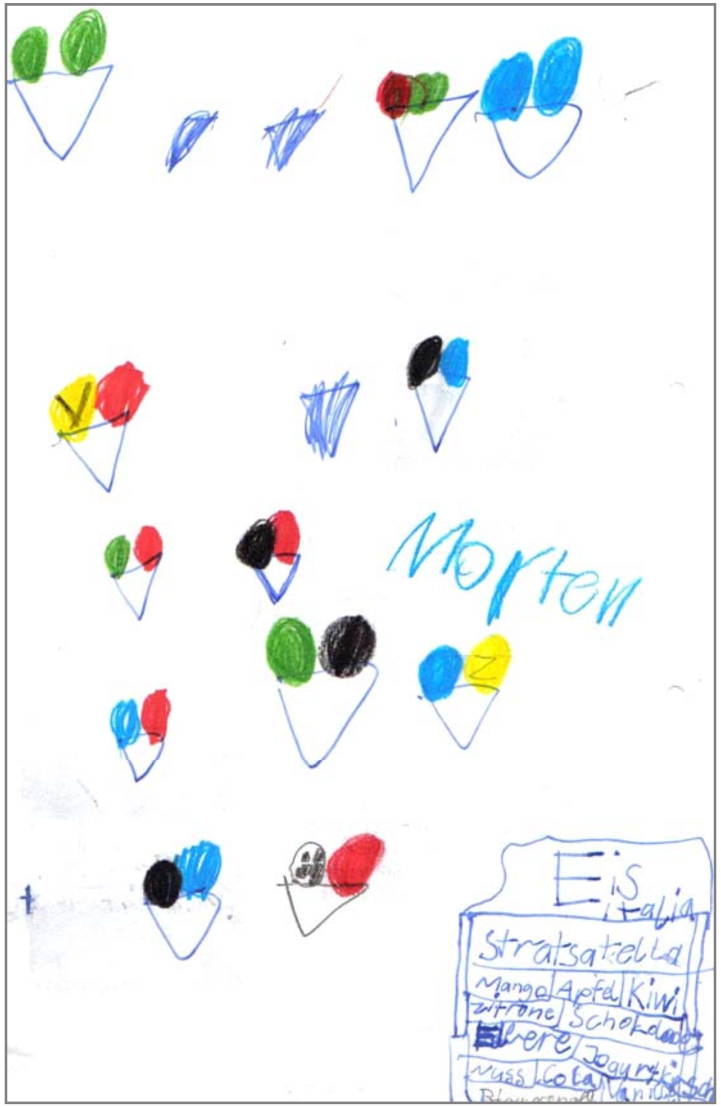


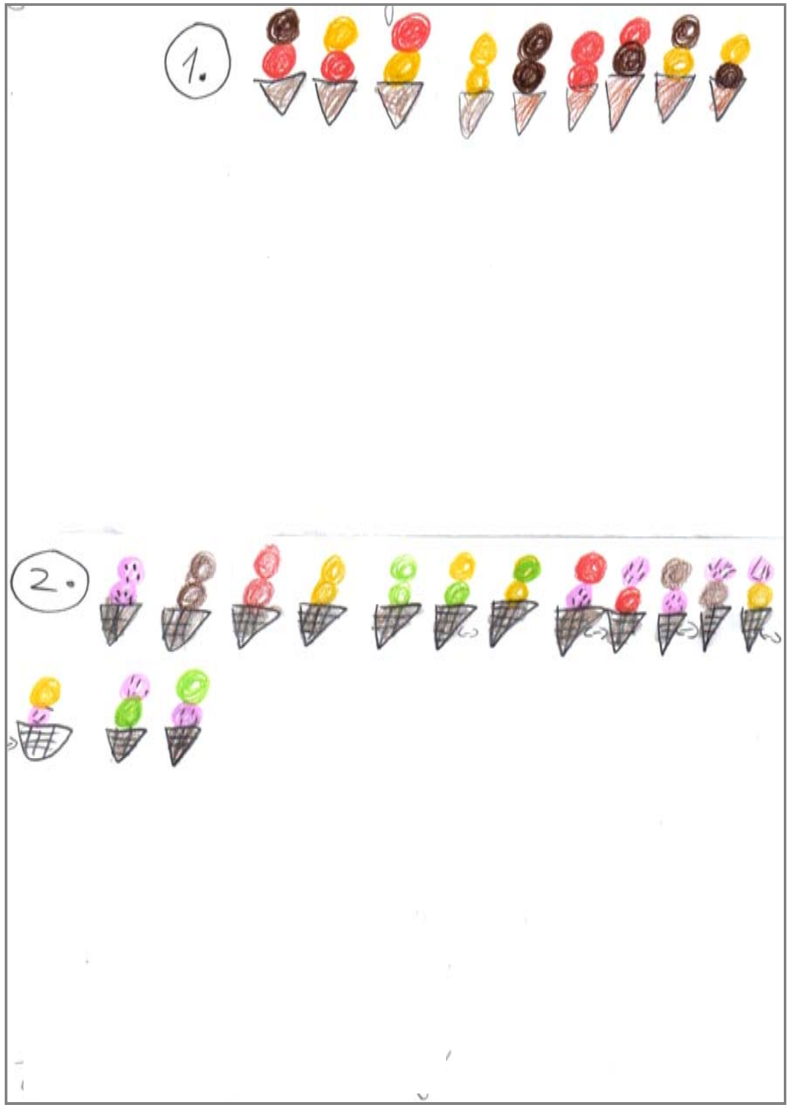
Tim möchte sich ein Eis kaufen. In der Eisdiele gibt es 3 Eissorten:
Erdbeere, Vanille und Schokolade.
Er darf sich 2 Kugeln aussuchen.
Welche Möglichkeiten hat er, sein Eis zusammen zu stellen?

Eis

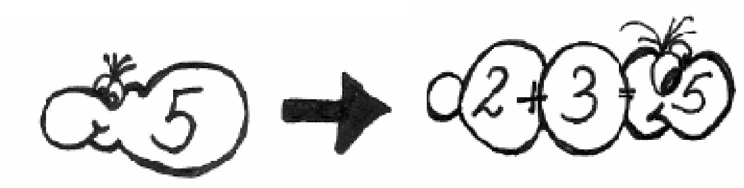
Du bist ein Eisverkäufer. In deine Eiswaffeln passen 2 Eiskugeln. Es kommt eine Gruppe Kinder zu dir. Wie viele Eissorten soll es bei dir geben? Welche Möglichkeiten haben die Kinder, ein Eis zusammen zu stellen?




Morten
Eis italia
Stratsatella
Mango
Apfel
Kiwi
zitrone
Schokolade
Nuss
Cola

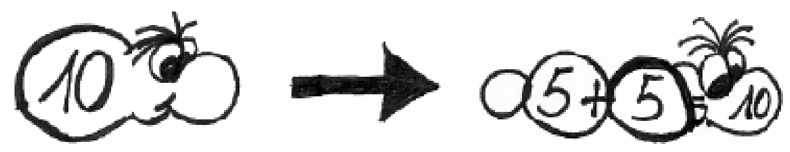

1.
2.

1. Die Kleine Raupe hat eine große Zahl verschluckt. Jetzt hat sie Bauchschmerzen, weil ihr die Zahl so schwer im Bauch liegt. Kannst du ihr helfen die Zahl zu zerlegen?

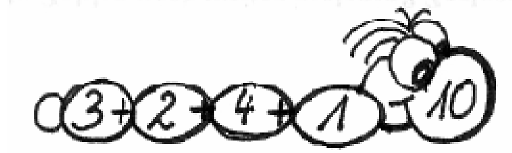


Klebe die Raupen in den Baum.

2. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die 10 zu zerlegen. Finde so viele wie möglich.

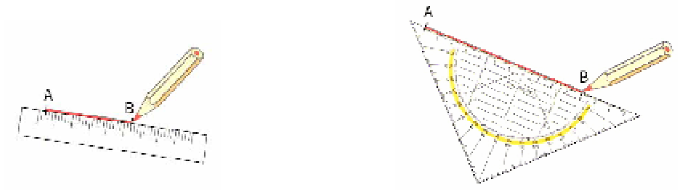


3. Zerlege Zahlen so, das du eine ganz lange Raupe bekommst. Suche Raupen unterschiedlicher Länge



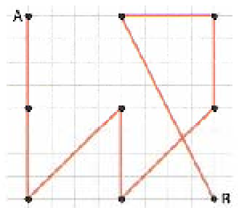
4. Finde Zahlen die du in gleiche Zahlen zerlegen kannst?

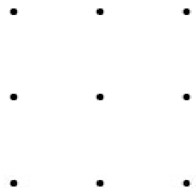
Wege im Gitter



1) Suche einen Weg, der alle Punkte verbindet, aber durch keinen Punkt mehrmals geht. Der Startpunkt ist frei wählbar. Wie lang ist der Weg?

Beispiel:

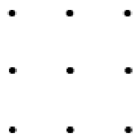


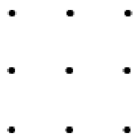


Länge: 20.3cm

Länge: ______________

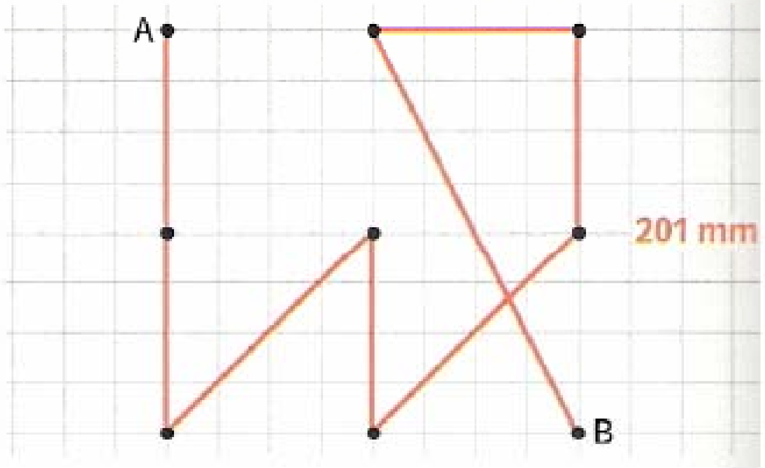
2) Suche einen kurzen und einen langen Weg, der alle Punkte verbindet, aber durch keinen Punkt mehrmals geht. Der Startpunkt ist frei wählbar. Wie lang ist jeweils dein Weg?





Kurzer Weg: ______________ Langer Weg: ______________

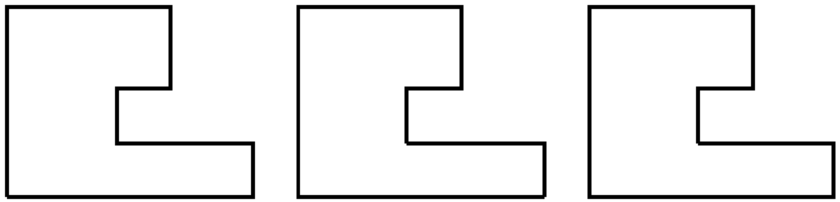
- Suche einen möglichst kurzen und einen möglichst langen Weg von A nach B, der alle Punkte verbindet, aber durch keinen Punkt mehrmals geht.



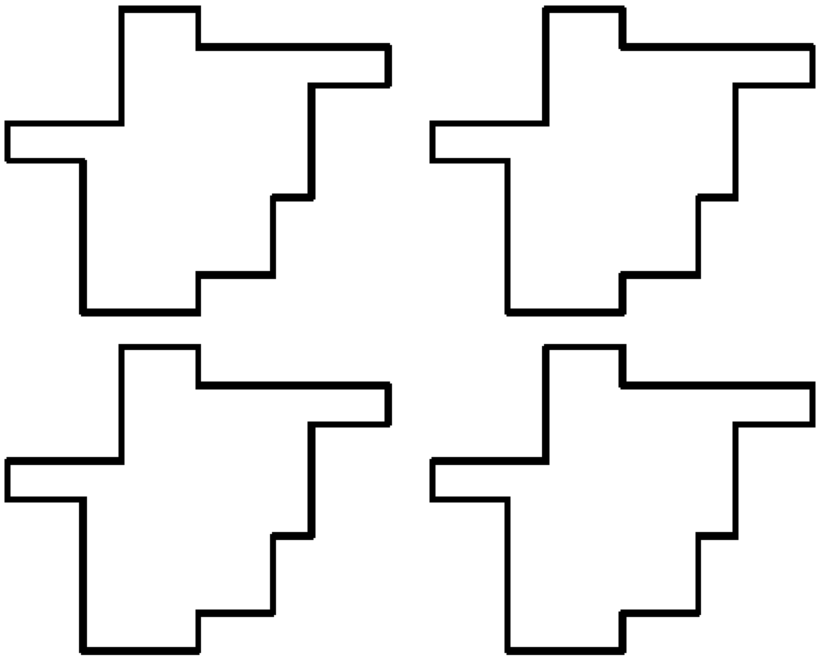
3) Finde einen möglichst kurzen und einen möglichst langen Weg, der alle Punkte verbindet, aber durch keinen Punkt mehrmals geht. Der Startpunkt ist frei wählbar. Wie lang sind die Wege?

Name: .... Klasse: .... Datum: ....

Aufgabe 1: Zerlege die Figur in Rechtecke.



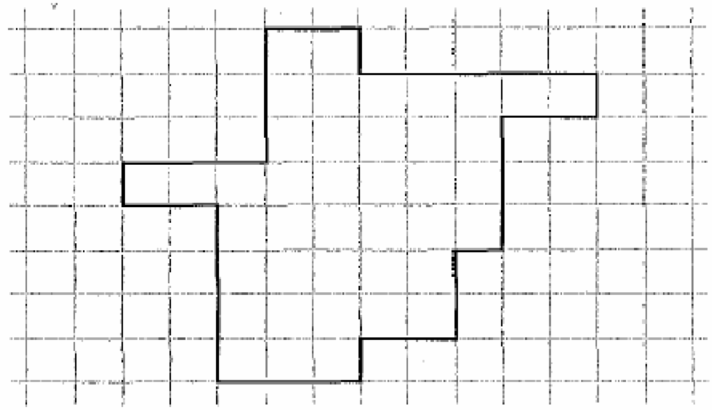
Aufgabe 2: Zerlege die Figur in möglichst wenige Rechtecke.



Aufgabe 3: Zeichne Figuren, die sich in Rechtecke zerlegen lassen.

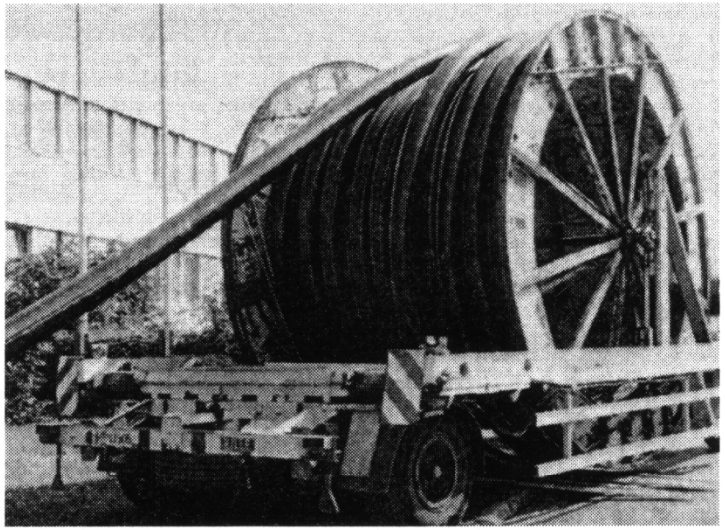
Zerlegungstricks

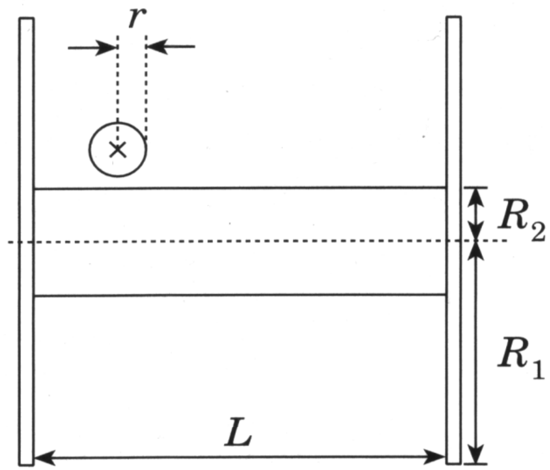
- Zerlege die Figur
  - in sieben Rechtecke.
  - in vier Quadrate und vier Rechtecke.
  - in sechs Rechtecke.



3. Zeichne Figuren, die sich in Rechtecke zerlegen lassen.

Die Kabeltrommel





▶ *Wie viel Meter Kabel passen auf diese Kabeltrommel?*

Maße:
Wickelbreite $L = 4{,}4$ m,
Flanschradius $R_1 = 2{,}5$ m,
Wickelkernradius $R_2 = 60$ cm,
Kabelradius $r = 15$ cm.

Die Kabeltrommel ist maßstäblich verkleinert, das Kabel ist im Vergleich zur Trommel doppelt so groß dargestellt.

Kasten 1: Die Kabeltrommel

Vorgehensweisen für das Erstellen geöffneter Aufgabensequenzen	
Ausgangspunkt: **Geschlossene Aufgaben** (z. B. aus Schulbüchern)	Ausgangspunkt: **„Knobel"- bzw. Problemaufgaben** (z. B. aus Aufgabensammlungen)
a) Analyse des *mathematischen Gehalts*, der über den Übungseffekt hinausweist bzw. hinausweisen kann	a) Analyse der *Möglichkeiten curricularer Einbindung* auf Grundlage verschiedener Lösungswege
b) Formulierung einer (meist) *geöffneten Problemstellung*, die neben dem Übungsgehalt auch den Zugang zum mathematischen Gehalt (implizit) anregt	b) Analyse des *Übungspotenzials* bei probierender Bearbeitung, des Lösungsprozesses und der mathematischen Struktur der Aufgabe
c) Analyse weiterer mögl. auch andersartiger *Lösungsmöglichkeiten* für die Kinder	
d) *Ausweitung der Fragestellung*, d. h. weitere mögl. *viele Fragen finden*, mit unterschiedlichen Bedingungen (Vorrausetzungen, Einschränkungen, …) für die Problemstellung	
e) *Zusammenfassen* aller Fragen in (möglichst) *einer einzigen* Fragestellung	
f) Ein *leichtes Ausgangsproblem* wird erstellt, dessen Bearbeitungszeit für alle Schülerinnen und Schüler ungefähr gleich ist, ggf. Verständnisfragen klärt und zu probierenden Ansätzen anregt.	
g) Mögliche *offene/geöffnete Anschlussfragen* werden konzipiert.	

Jetzt sind sie gefragt …

- Entwickeln Sie aus folgender Aufgabe eine offene Aufgabensequenz

Entwickeln Sie aus folgender Aufgabe eine offene Aufgabensequenz

Anna multipliziert drei natürliche Zahlen miteinander. Sie erhält als Produkt eine ungerade Zahl. Ist die Summe dieser drei Zahlen gerade oder ungerade?

Gib eine allgemeine Begründung an!

Bardy/Hrzan (2005), S.30

<table>
<tr><th colspan="2">Vorgehensweisen für das Erstellen geöffneter Aufgabensequenzen</th></tr>
<tr><td>Ausgangspunkt:
Geschlossene Aufgaben
(z. B. aus Schulbüchern)</td><td>Ausgangspunkt:
„Knobel“- bzw. Problemaufgaben
(z. B. aus Aufgabensammlungen)</td></tr>
<tr><td>a) Analyse des mathematischen Gehalts, der über den Übungseffekt hinausweist bzw. hinausweisen kann</td><td>a) Analyse der Möglichkeiten curricularer Einbindung auf Grundlage verschiedener Lösungswege</td></tr>
<tr><td>b) Formulierung einer (meist) geöffneten Problemstellung, die neben dem Übungsgehalt auch den Zugang zum mathematischen Gehalt (implizit) anregt</td><td>b) Analyse des Übungspotenzials bei probierender Bearbeitung, des Lösungsprozesses und der mathematischen Struktur der Aufgabe</td></tr>
<tr><td colspan="2">c) Analyse weiterer mögl. auch andersartiger Lösungsmöglichkeiten für die Kinder</td></tr>
<tr><td colspan="2">d) Ausweitung der Fragestellung, d. h. weitere mögl. viele Fragen finden, mit unterschiedlichen Bedingungen (Vorrausetzungen, Einschränkungen, …) für die Problemstellung</td></tr>
<tr><td colspan="2">e) Zusammenfassen aller Fragen in (möglichst) einer einzigen Fragestellung</td></tr>
<tr><td colspan="2">f) Ein leichtes Ausgangsproblem wird erstellt, dessen Bearbeitungszeit für alle Schülerinnen und Schüler ungefähr gleich ist, ggf. Verständnisfragen klärt und zu probierenden Ansätzen anregt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">g) Mögliche offene/geöffnete Anschlussfragen werden konzipiert.</td></tr>
</table>

Dividieren – Von kleinen zu großen Aufgaben

24 E : 4 = 6 E	14 : 7 = 2	$480 \xrightarrow{:60} 8$
24 Z : 4 = 6 Z	140 : 7 = 20	$480 \xrightarrow{:10} 48 \xrightarrow{:6} 8$
	140 : 70 = 2	

(1) Erklärt die Rechenwege auf den drei Darstellungen.

(2) 240 : 4	(6) 150 : 5	(10) 300 : 3	(14) 400 : 80	(18) 900 : 90	(22) 280 : 70
(3) 360 : 4	(7) 350 : 5	(11) 240 : 3	(15) 560 : 80	(19) 450 : 90	(23) 420 : 70
(4) 180 : 2	(8) 120 : 6	(12) 360 : 9	(16) 160 : 80	(20) 270 : 90	(24) 630 : 70
(5) 140 : 2	(9) 420 : 6	(13) 630 : 9	(17) 720 : 80	(21) 540 : 90	(25) 490 : 70

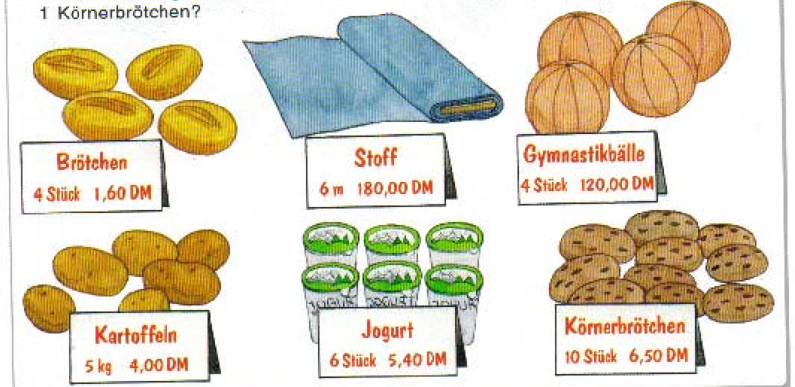
S. 11, Nr. 26

90 : 7 = 12 R 6 Probe: 12 · 7 = 84 84 + 6 = 90

70 : 7 = 10 10 · 7 = 70
20 : 7 = 2 R 6 2 · 7 = 14

(26) 90 : 7	(30) 58 : 5	(34) 100 : 8	(38) 75 : 6	(42) 119 : 10	(46) 125 : 9
(27) 100 : 7	(31) 62 : 5	(35) 150 : 8	(39) 100 : 6	(43) 136 : 10	(47) 135 : 9
(28) 120 : 7	(32) 74 : 5	(36) 126 : 8	(40) 118 : 6	(44) 154 : 10	(48) 172 : 9
(29) 132 : 7	(33) 89 : 5	(37) 137 : 8	(41) 85 : 6	(45) 199 : 10	(49) 166 : 9

(50) Wie viel kostet:
1 Brötchen, 1 kg Kartoffeln, 1 m Stoff, 1 Gymnastikball, 1 Jogurt, 1 Körnerbrötchen?



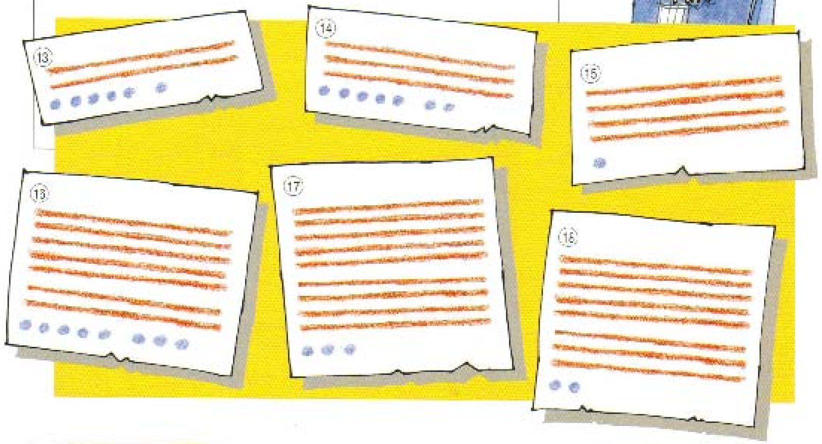
Zahlen bis 100 – Zahlwörter

Lies die Zahlwörter. Beachte die Silbe „und".
Betone die Zehner.

(1) sechsundzwanzig	(5) dreiundneunzig	(9) einundzwanzig
(2) siebenunddreißig	(6) zweiundachtzig	(10) achtzehn
(3) einundvierzig	(7) vierundsechzig	(11) hundert
(4) achtundsiebzig	(8) neunundfünfzig	(12) vierundvierzig

S. 13, Nr. 13
2 Z + 6 E = 20 + 6 = 26

Schreibe zu den Bildern die Zahlen auf drei Arten.



Zeichne und schreibe die Zahlen auf drei Arten dazu.

(19) sechsunddreißig	(24) zweiundzwanzig	(29) sechzehn	(34) neun
(20) fünfundvierzig	(25) dreiundsiebzig	(30) vierundneunzig	(35) neunzehn
(21) vierundfünfzig	(26) siebenunddreißig	(31) vierundfünfzig	(36) neunzig
(22) einundsiebzig	(27) fünfundachtzig	(32) neunundfünfzig	(37) neunundneunzig
(23) siebzehn	(28) achtundfünfzig	(33) fünfundsiebzig	(38) hundert

Zum Schluss …

Natürliche Differenzierung ist nicht einfach …

… aber sie funktioniert!

Und ganz zum Schluss …

- Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

F.Foerster@tu-braunschweig.de
W.Grohmann@tu-braunschweig.de