INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. C. Jurecka
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK WS 2001/2002

13. Übungsblatt

---

20. **Ginzburg-Landau-Theorie**

Die Dichte der freien Energie eines Supraleiters in einem äusseren Magnetfeld $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ wird im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie durch

$$f_s(\mathbf{r}) = f_n + \left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \alpha|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(\mathbf{r})|^4; \quad \alpha = \alpha'(T - T_C); \quad \alpha', \beta > 0$$

beschrieben. f_n ist die Dichte der freien Energie im normalleitenden Zustand und T_C die Übergangstemperatur.

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $\mathbf{A} = 0$ und $\psi \neq \psi(\mathbf{r})$. Skizzieren Sie die freie Energie $F = \int dr^3 f(\mathbf{r})$ für $T > T_C$ und $T < T_C$ als Funktion von $|\psi|$. Bestimmen Sie für $T < T_C$ dasjenige $|\psi|$, dass die freie Energie minimiert.

(b) Leiten Sie aus der Forderung, dass die freie Energie $F_s = \int dr^3 f_s$ durch die Wellenfunktion ψ_S im supraleitenden Zustand minimiert wird, die folgende Differentialgleichung für $\psi(\mathbf{r})$ ab:

$$\alpha\psi(\mathbf{r}) + \beta|\psi(\mathbf{r})|^2\psi + \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{1}$$

Hinweis: Setzen Sie für die Wellenfunktion $\psi = \psi_S + \delta\psi$ an und verlangen Sie, dass die Variation δF verschwindet. Beschränken Sie sich dabei auf eine Dimension und verwenden Sie als Randbedingung:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi \Big|_{\text{Rand des SL}} = 0.$$

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass man Gleichung (1) auch aus der Funktionalableitung $\partial f / \partial \psi* = 0$ erhalten kann.

(d) Wir betrachten einen supraleitenden Halbraum (SL für $x > 0$) ohne äußeres Feld ($\mathbf{A} = 0$). Führen Sie zunächst in Gleichung (1) die normierte Wellenfunktion $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)/\psi_\infty$ mit $\psi_\infty = \sqrt{-\alpha/\beta} > 0$ ein und linearisieren Sie diese Gleichung durch $\tilde{\psi}(x) = 1 + g(x)$. Lösen Sie die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung mit den Randbedingungen $\psi(x = 0) = 0; \psi(\infty) = \psi_\infty$ und skizzieren Sie das Ergebnis.