INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. C. Jurecka
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK WS 2001/2002

12. Übungsblatt

17. **Zweite Quantisierung**
Im N-Teilchen Hilbertraum $\mathcal{H}_N$ identischer Teilchen sind nur die Unterräume *symmetrischer* und *antisymmetrischer* Wellenfunktionen physikalisch relevant, in denen für die Wellenfunktion bei Vertauschung von Teilchenkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned}\text{Bosonen}: \quad \Psi(\dots r_i, \dots, r_j \dots) &= \Psi(\dots, r_j, \dots, r_i \dots)\\ \text{Fermionen}: \quad \Psi(\dots r_i, \dots, r_j \dots) &= -\Psi(\dots, r_j, \dots, r_i \dots).\end{aligned}$$

Im folgenden soll $\varphi_\alpha(i)$ die Ein-Teilchen-Wellenfunktion des i-ten Teilchens im Zustand α bezeichnen. Wir definieren die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Ein-Teilchen-Zustände über:

$$|\varphi_r(1)\rangle = b_r^\dagger|0\rangle; \quad b_r = (b_r^\dagger)^\dagger.$$

$|0\rangle$ ist der Vakuumzustand, in dem keine Teilchen vorhanden sind. Wir verwenden die Symbole $b = a$ für Bosonen und $b = c$ für Fermionen.
In der Besetzungzahldarstellung sind die Zustände eines N-Teilchensystems identischer Teilchen durch die Angabe der Besetzungszahlen n_i aller Zustände $|i\rangle$ angegeben; also z.B. $\Psi(1,2,\dots,N) = |n_1, n_2 \dots\rangle$ mit $N = \sum_i n_i$ und

$$|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle = |\underbrace{\varphi_1(i_1)\varphi_1(i_2)\dots}_{n_1}, \dots, \underbrace{\varphi_r(i_k)\varphi_r(i_{k+1})\dots}_{n_r}, \dots\rangle \ .$$

Die Übergänge zwischen dem N- und $(N+1)$-Teilchenraum werden durch die *Erzeugungsoperatoren* $b_r^\dagger$ vermittelt:

$$b_r^\dagger|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle = \sqrt{n_r+1}|\varphi_r(N+1), \underbrace{\varphi_1(i_1)\varphi_1(i_2)\dots}_{n_1}, \dots, \underbrace{\varphi_r(i_k)\varphi_r(i_{k+1})\dots}_{n_r}, \dots\rangle \quad . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass für Bosonen

$$a_r^\dagger|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle = \sqrt{n_r+1}|n_1, \dots, n_r+1, \dots\rangle$$

und für Fermionen:

$$c_r^\dagger|\dots, n_r, \dots\rangle = (-1)^{N_r}\delta_{n_r,0}|\dots, n_r+1, \dots\rangle \quad \text{mit} \quad N_r = \sum_{s=1}^{r-1} n_s$$

gilt.

(b) Leiten Sie aus der Definition (1) der Erzeugungsoperatoren die fundamentale Vertauschungsrelation $[a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0$ und $\{c_r^\dagger, c_s^\dagger\} = 0$ ab ($[.,.]$ bezeichnet den Kommutator, $\{.,.\}$ den Antikommutator).

(c) Wie ist die Orthogonalitätsrelation in der Besetzungszahldarstellung zu formulieren?

(d) Drei Elektronen befinden sich in den Zuständen φ_1, φ_2 und φ_3.

- Geben Sie die Gesamtwellenfunktion $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ an. Wie wird dieser Zustand in Besetzungszahldarstellung notiert?
- c_α seien Vernichtungsoperatoren für die Ein-Elektron-Wellenfunktionen φ_α. Geben Sie die Zustände $c_1\psi$, $c_2\psi$, sowie $c_1c_2\psi$ und $c_2c_1\psi$ an.

(e) Ein System enthalte zwei verschiedene bosonische Teilchensorten beschrieben durch Ein-Teilchen-Wellenfunktionen $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ und $\phi_\alpha(\mathbf{r})$. Geben Sie die Gesamtwellenfunktion $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ für ein System mit zwei Teilchen jeder Sorte an. Wie sieht die Wellenfunktion aus, wenn die Teilchen Fermionen sind?

18. **Vertauschungsrelationen für Fermionen**
c_α und $c_\alpha^\dagger$ seien Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Fermionen im Zustand α. Zeigen Sie mit Hilfe der fundamentalen Vertauschungsrelationen (es gilt $n_\alpha = c_\alpha^\dagger c_\alpha$):

$$\begin{array}{rcc} (c_\alpha^\dagger)^2 = (c_\alpha)^2 = 0 & (n_\alpha)^2 = n_\alpha & c_\alpha n_\alpha = c_\alpha \\ c_\alpha^\dagger n_\alpha = 0 & n_\alpha c_\alpha = 0 & n_\alpha c_\alpha^\dagger = c_\alpha^\dagger. \end{array}$$

19. **Ein-Teilchen-Operatoren**
Allgemein erhält man Ein-Teilchen-Operatoren $F = \sum_i f_i$ in Besetzungszahldarstellung durch

$$F = \sum_{\mu\nu} f_{\mu\nu} c_\mu^\dagger c_\nu \quad \text{mit} \quad f_{\mu\nu} = \langle \mu | f_i | \nu \rangle.$$

Die Operatoren f_i wirken nur auf den Ein-Teilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}_i$. $\{|\mu\rangle\}$ ist ein vollständiger Satz von Ein-Teilchen-Zuständen.

(a) Reproduzieren Sie für freie Elektronen das in der Vorlesung angegebene Resultat für die kinetische Energie $T = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma}$.

(b) Zeigen Sie, dass sich für den Teilchendichteoperator

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i})$$

in Besetzungszahldarstellung der folgende Ausdruck ergibt:

$$\rho(\mathbf{r}) = \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\sigma(\mathbf{r}).$$

Die Operatoren $\psi_\sigma(\mathbf{r}) := \sum_\mu \varphi_\mu(\mathbf{r}) c_\mu^\dagger$ heissen *Feldoperatoren.* $\varphi_\mu(\mathbf{r})$ sind die Ein-Teilchen-Wellenfunktionen.

(c) Ermitteln Sie die Fourierkomponente $\rho_{\mathbf{k}}$ der Teilchenzahldichte, indem Sie für die Feldoperatoren $\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} c_{\mathbf{k},\sigma}$ ansetzen.