INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Ing. C. Jurecka
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK WS 2001/2002

11. Übungsblatt

---

14. **Zustandsdichte und van Hove Singularitäten**
Für die Zustandsdichte von Phononen in d Dimensionen mit der Dispersion $\omega_s(\mathbf{k})$ gilt:

$$Z(\omega) = \sum_s \int \frac{dS}{(2\pi)^d} \frac{1}{|\nabla \omega_s(\mathbf{k})|}. \tag{1}$$

Der Index s bezeichnet die verschiedenen Normalmoden. Die Integration erfolgt über eine Fläche mit $\omega_s(\mathbf{k}) = \text{const}$. Markante Punkte der Zustandsdichte liegen dort vor, wo $|\nabla \omega_s(\mathbf{k})| = 0$ gilt (van Hove Singularitäten). In dieser Aufgabe wird der unterschiedliche Verlauf von $Z(\omega)$ an diesen Punkten in einer bzw. drei Dimensionen diskutiert.

   (a) Skizzieren Sie die Phononendispersion einer ein- bzw. zweiatomigen linearen Kette und leiten Sie daraus den Verlauf der Zustandsdichte $Z(\omega)$ ab. Wo liegen van Hove Singularitäten vor?

   (b) Für die Dispersion einer einatomigen linearen Kette gilt $\omega(k) = \omega_0 |\sin(ka/2)|$, wobei a der Abstand der Atome ist. Berechnen Sie die Zustandsdichte.

   (c) Zeigen Sie, dass in drei Dimensionen die Zustandsdichte in der Nähe eines Maximums ω_0 der Phononendispersion über $Z(\omega) \sim (\omega_0 - \omega)^{1/2}$ von der Frequenz abhängt. Welcher Zusammenhang ergibt sich in der Umgebung eines Minimums, wie verläuft die Zustandsdichte, wenn ein Sattelpunkt vorliegt?

15. **Einstein-Modell für optische Phononen**
Eine geeignete Näherung für optische Phononen besteht darin, für die Dispersion $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{\mathrm{E}} = \text{const}$ anzunehmen.

   (a) Berechnen Sie für einen Kristall mit einer p-atomigen Basis im Einstein-Modell den Beitrag der optischen Phononen zur spezifische Wärme C_V. Nehmen Sie für jeden Zweig der optischen Phononen die gleiche Frequenz ω_{E} an.

   (b) Diskutieren Sie das Verhalten von C_V bei tiefen Temperaturen $T \ll \Theta_{\mathrm{E}}$ bzw. hohen Temperaturen $T \gg \Theta_{\mathrm{E}}$. *Hinweis:* $\Theta_{\mathrm{E}} = \hbar\omega_{\mathrm{E}}/k_{\mathrm{B}}$ ist die Einstein-Temperatur.

16. **Spezifische Wärme**
Wir betrachten ein d-dimensionales System und untersuchen den Beitrag zur spezifischen Wärme von bosonischen Anregungen mit der Dispersion $\omega(\mathbf{k}) = c\,k^{\nu}$.

   (a) Nennen Sie Beispiele für bosonische Anregungen im Festkörper.

   (b) Zeigen Sie, daß die Zustandsdichte mit $Z(\omega) \sim \omega^{d/\nu - 1}$ variiert.

   (c) Leiten Sie aus Aufgabenteil (16b) für die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme C_V das Resultat $C_V \sim T^{d/\nu}$ ab.

   (d) Unter welcher Voraussetzung stellt dieser Zusammenhang bei Dispersion $\omega(\mathbf{k})$ eine Tief-Temperaturnäherung für $C_V(T)$ dar?