INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

16. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 1.7.2003, 11.25 Uhr**

Hinweis: Aufgaben, die mit *freiwillige Abgabe* gekennzeichnet sind, können als Zusatzaufgabe bearbeitet und abgegeben werden. Abgabetermin für diese Aufgaben ist jeweils der Termin des aktuellen Hausaufgabenblattes.

50. **Multipolentwicklung I**
Betrachten Sie zwei Ladungsverteilungen ρ_1, ρ_2, die sich in großem Abstand R voneinander befinden mögen. Entwickeln Sie das Wechselwirkungspotential

$$\Phi = \int_{V_1} d^3\vec{r}_1 \int_{V_2} d^3\vec{r}_2 \, \frac{\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

bis zur 3. Ordnung in $1/R$ und drücken Sie Ihr Ergebnis durch die Multipolmomente der beiden Ladungsverteilungen aus. Was ergibt sich hier in führender Ordnung für die Kraft zwischen zwei Ladungsverteilungen, die jeweils eine verschwindende Gesamtladung haben?
Hinweis: Legen Sie den Koordinatensprung in einen beliebigen Punkt im Volumen V_1 der Ladungsverteilung ρ_1. Wählen Sie einen weiteren beliebigen Punkt im Volumen V_2 und bezeichnen Sie dessen Ortsvektor mit $\vec{R}, |\vec{R}| = R$.

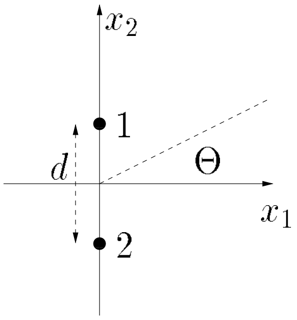
51. **Multipolentwicklung II: Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment**
    (a) Was versteht man unter der Fernfeldnäherung?
    (b) Geben Sie die Definition von Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment an. Welche Beiträge liefern diese Momente zum Potential Φ? Berechnen Sie das von einem reinen Dipol erzeugte elektrische Feld.
    (c) Berechnen Sie Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der folgenden Ladungsverteilungen:
        i. eines homogen geladenen Rotationsellipsoiden (Halbachsen a, a, c), wobei die Symmetrieachse des Ellipsoiden um den Winkel ϕ_0 gegen die x_3-Achse gekippt sein soll. Der Koordinatenursprung liege im Schwerpunkt des Ellipsoiden, wobei dieser eine konstante Dichte besitzt.
        ii. Auf den Ecken eines Würfels der Kantenlänge a befinden sich Ladungen $\pm q$. Je zwei benachbarte Ladungen haben unterschiedliches Vorzeichen. Die Ladungen seien symmetrisch um den Koordinatenursprung verteilt.

52. **Magnetisches Moment**
Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ eines infinitesimal dünnen Leiterdrahtes, der als Quadrat geformt ist und in dem der konstante Strom I fließt. Der Koordinatenursprung sei im Mittelpunkt des Quadrates. Welchen Beitrag liefert das magnetische Moment $\vec{m}$ im allgemeinen und in diesem Beispiel zur magnetischen Induktion $\vec{B}$?

53. **Parallele elektrische Dipole**
Zwei parallel zueinander ausgerichtete elektrische Dipole mit Abstand $d = \lambda/2$ oszillieren mit gleicher Frequenz und Amplitude (siehe Skizze). Diskutieren Sie die Austrahlung des Systems in der Fernzone.

(a) Berechnen Sie die in der Äquatorialebene ($x_3 = 0$) abgestrahlte Intensität $I = I(\Theta)$ und skizzieren sie die Intensitätsverteilung $I(\Theta)/I_0$ als Polardiagramm für den Fall, dass die Dipole in Phase schwingen. I_0 bezeichnet die Intensität eines einzelnen Dipols.

(b) Welche Phasenverschiebung muß Dipol 2 gegenüber Dipol 1 aufweisen, damit ein Beobachter in der Richtung $\Theta = \pi/6$ maximale Intensität mißt? Für welchen Winkel Θ gibt es dann keine Ausstrahlung? Skizzieren Sie wiederum $I(\Theta)/I_0$.

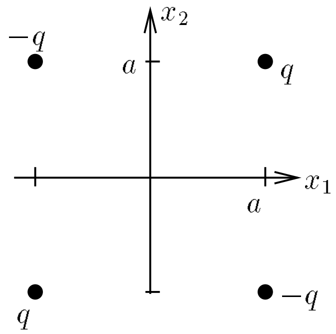


54. **Greensche Funktion in 2 Dimensionen (Zusatzaufgabe;** *freiwillige Abgabe***)**
In der Vorlesung ist die Berechnung der retardierten Greenschen Funktion der skalaren Wellengleichung für drei Raumdimensionen vorgeführt werden. Ermitteln Sie die retardierte Greensche Funktion für zwei Raumdimensionen.
Hinweis: bei der Integration über $\vec{k}$ werden Sie Ausdrücke für die Bessel-Funktion 0-ter Ordnung $J_0(x)$ erhalten. Schlagen Sie die entsprechenden Integrale in einer geeigneten Integraltafel nach.

55. **Multipolentwicklung III (Präsenzübung,** *freiwillige Abgabe***)**
Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der folgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs:

(a) 4 Punktladungen q auf den Eckpunkten eines Quadrates der Seitenlänge $2a$ mit alternierendem Vorzeichen (siehe Skizze).

(b) einer mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = cr^2$ ($c =$const) geladenen Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liege.



56. **Quadrupolmoment (Präsenzübung,** *freiwillige Abgabe***)**

(a) Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment ein Tensor 2. Stufe ist.

(b) Wann ist das Quadrupolmoment unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(c) Überlegen Sie sich, unter welchen Vorrausetzungen man das Quadrupolmoment Q_{ij} eines starren Körpers durch seinen Trägheitstensor Θ_{ij} ausdrücken kann. Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Quadrupolmoments und denen des Trägheitstensors an.