INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

15. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 24.6.2003, 11.25 Uhr**

Hinweis: Aufgaben, die mit *freiwillige Abgabe* gekennzeichnet sind, können als Zusatzaufgabe bearbeitet und abgegeben werden. Abgabetermin für diese Aufgaben ist jeweils der Termin des aktuellen Hausaufgabenblattes.

42. **Maxwellsche Gleichungen im Vakuum**
Diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen an $E_0(\theta)$ und k der folgende Ansatz für das elektrische Feld Lösungen der Maxwellschen Gleichungen im Vakuum ergibt

$$\vec{E} = E(r,\theta,t)\vec{e}_\theta = \frac{E_0(\theta)}{r} e^{i(kr-\omega t)}\vec{e}_\theta; \quad \vec{k} = k\vec{e}_r.$$

Ermitteln Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ und überprüfen Sie alle vier Maxwellschen Gleichungen. Geben Sie reelle Lösungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an und berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$. Bestimmen Sie dessen zeitlichen Mittelwert $\langle\vec{S}\rangle = (1/T)\int_0^T dt\,\vec{S}(t)$.

43. **Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung**
In dieser Aufgabe soll das Feld einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Punktladung berechnet werden.

(a) Bestimmen Sie das Vierer-Potential $A^{\mu\prime}$ der Punktladung in ihrem Ruhesystem Σ'. Geben Sie das Vierer-Potential aus Sicht eines relativ zu Σ' mit $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ bewegten Inertialsystems Σ an. Welche Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beobachtet man in Σ? Bestimmen Sie die Äquipotentialflächen $\Phi(\vec{r}) = \text{const}$ und skizzieren Sie diese sowie die Feldlinien von $\vec{E}$.

(b) Aus der Vorlesung sind die Liénard-Wiechert Potentiale bekannt. Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ für den Fall einer Punktladung, die sich mit konstantem $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ bewegt. Leiten Sie dazu die folgende Form der Liénard-Wiechert Potentiale ab:

$$\begin{aligned} A_i(\vec{r},t) &= \frac{q}{c}\left.\frac{v_i(\tau)}{[|\vec{r}-\vec{x}(\tau)| - (1/c)\vec{v}(\tau)\cdot(\vec{r}-\vec{x}(\tau))]}\right|_{\tau=t_{\rm ret}} \\ \Phi(\vec{r},t) &= \left.\frac{q}{[|\vec{r}-\vec{x}(\tau)| - (1/c)\vec{v}(\tau)\cdot(\vec{r}-\vec{x}(\tau))]}\right|_{\tau=t_{\rm ret}}. \end{aligned} \tag{1}$$

$\vec{x}(t)$ ist die Bahnkurve der Punktladung und $\vec{v}(t)$ ihre Geschwindigkeit. Beachten Sie beim Differenzieren, dass die Gleichung $t_{\rm ret} = t - |\vec{r} - \vec{x}(t_{\rm ret})|/c$ eine *implizite* Definition der retardierten Zeit darstellt. Formen Sie $\vec{E}$ solange um, bis Sie für $\vec{E}$ Ihr Ergebnis aus Teil (a) erhalten (und zwar dasjenige für $\vec{E}$ aus (a)!).
Hinweis: Es ist hilfreich, die Abkürzungen

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{x}(t_{\rm ret}); \quad R = |\vec{R}|; \quad v_R = \frac{\vec{v}(t_{\rm ret})\cdot\vec{R}}{R}$$

einzuführen und zunächst die Ausdrücke $\partial t_{\text{ret}}/\partial t; \nabla t_{\text{ret}}; \nabla R; \nabla v_R$ usw. zu bestimmen, *ohne* dabei die retardierte Zeit zu eliminieren. Stellen Sie also zunächst $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Abhängigkeit von $\vec{R}$ und v_R dar. Um mit (a) vergleichen zu können, muss die retardierte Zeit aus $\vec{E}$ eliminiert werden. Zeigen Sie dazu:

$$\vec{r} - \vec{v}t = \vec{R} - R\frac{\vec{v}}{c} \quad \text{und} \quad R^2(1 - v_R/c)^2 = (\vec{r} - \vec{v}t)^2 - \{(\vec{v}/c) \times (\vec{r} - \vec{v}t)\}^2.$$

44. **Faltungssatz der Fouriertransformation**

    (a) Setzen Sie voraus, dass die Fouriertransformierten $f(\omega), g(\omega)$ der Funktionen $f(t), g(t)$ existieren. Zeigen Sie: $h(\omega) = \sqrt{2\pi} f(\omega) g(\omega)$, falls $h(t)$ die Faltung $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau) g(t-\tau)$ von f und g ist.

    (b) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil (a), um $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, g(t-\tau)$ zu berechnen, wobei die Funktionen f, g durch $f(t) = \sqrt{a/\pi}\exp(-at^2)$ bzw. $g(t) = \sqrt{b/\pi}\exp(-bt^2)$ mit $a, b > 0$ gegeben seien.
    Hinweis: verwenden Sie ohne Beweis: $\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-(t+ic)^2) = \sqrt{\pi}$.

45. **Drehimpulsbilanz des elektromagnetischen Feldes im Vakuum**
    Zeigen Sie, ausgehend von der lokalen Impulsbilanz des elektromagnetischen Feldes (siehe Vorlesung), dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = (1/c^2)\int_{\mathcal{R}^3} dV\ (\vec{r} \times \vec{S})$ des elektromagnetischen Feldes eine Erhaltungsgröße ist (beachten Sie: $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$).

46. **Ebene Wellen (Präsenzübung)**
    Gegeben sei eine ebene Welle im Vakuum: $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$.

    (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{E}, \operatorname{div} \vec{E}$ und $\dot{\vec{E}}$.

    (b) Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ und geben Sie $\operatorname{div} \vec{B}$, $\operatorname{rot} \vec{B}$ sowie $\dot{\vec{B}}$ an.

47. **Elektromagnetisches Feld einer bewegten, homogen geladenen Kugel (Präsenzübung;** *freiwillige Abgabe***)**
    Bestimmen Sie das von einer mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten, homogen geladenen Kugel erzeugte elektromagnetische Feld.
    Hinweis: geben Sie das Vierer-Potential im Ruhesystem der Kugel an und führen Sie eine geeignet gewählte Lorentz-Transformation durch.

48. **Poynting-Theorem (Präsenzübung;** *freiwillige Abgabe***)**
    Leiten Sie die differentielle Version des Poynting-Theorems aus den Maxwellschen Gleichungen ab.
    Hinweis: multiplizieren Sie $\operatorname{rot}\vec{E}$ und $\operatorname{rot}\vec{B}$ mit $\vec{B}$ bzw. $\vec{E}$ und bilden Sie dann die Differenz der beiden Ausdrücke.

49. **Kugelsymmetrische Lösungen der skalaren Wellengleichung (Präsenzübung;** *freiwillige Abgabe***)**
    Diskutieren Sie die allgemeine Form kugelsymmetrischer Lösungen der homogenen, skalaren Wellengleichung $\Delta\Psi(\vec{r}, t) - (1/c^2)\partial_t^2\Psi(t) = 0$.
    Hinweis: verwenden Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und setzen Sie $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r, t)$ an. Zeigen Sie: $\partial_r^2 u(r,t) - (1/c^2)\partial_t^2 u(r,t) = 0$ mit $u = r\Psi$