INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

12. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 27.5.2003, 11.25 Uhr**

Termine: die **1. Klausur** findet am Mittwoch, den 28.05.03, von 14-16 Uhr statt (Gruppe 1: MS 3.3, Gruppe 2 & 3: MS 3.1). Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen.
Die Zusatzübung am Mittwoch, den 28.05.03, entfällt.
Die Zusatzübung am **Mittwoch, den 21.05.03,** beginnt bereits um **11:20 Uhr**!
Aufgabe 31 ist als **Hausaufgabe** zu bearbeiten und wird am Dienstag, 27.05.2003, in den kleinen Übungen besprochen. **Aufgabe 32** wird in der Zusatzübung am Mittwoch, den 21.05.03, behandelt, d.h., die Abgabe einer ausgearbeiteten Lösung ist **nicht** verlangt.
Wer jedoch möchte, kann die Aufgaben aus den Zusatzübungen (Aufgabe 20, 21, 25, 30, 32) bearbeiten, um -bei korrekter Lösung- Zusatzpunkte zu erlangen (Abgabe: Dienstag, 27.05.03, 11.25 Uhr).

31. **Legendre-Polynome I**
Das Potential auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R beträgt $\Phi(R,\theta,\phi) = A_0\cos(2\theta)$. Außerdem gelte $\lim_{r\to\infty}\Phi(r,\theta,\phi) = 0$. Lösen Sie dieses Randwertproblem für $r < R$ und $r > R$. Ermitteln Sie außerdem die Ladungsdichte $\sigma(\theta,\phi)$ auf der Kugeloberfläche.

32. **Legendre-Polynome II: leitende Kugel im homogenen Feld**
Als Anwendung der in der Vorlesung eingeführten Legendre-Polynome betrachten wir eine leitende Kugel mit Radius R in einem statischen elektrischen Feld, das in größerer Entfernung von der Kugel homogen ist. Zum Beispiel könnte so ein Feld von einem Plattenkondensator erzeugt worden sein. Der Koordinatenursprung soll im Mittelpunkt der Kugel liegen.
Es handelt sich um ein zylindersymmetrisches Problem. Die Lösung $\Phi(\vec{r})$ der Laplace-Gleichung außerhalb der Kugel muss sich daher als

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{R_l(r)}{r}P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

schreiben lassen. Das Problem besteht jetzt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l aus den Randbedingungen.

(a) Geben Sie das Potential im Inneren der Kugel an. Aus der Stetigkeit von $\Phi(r,\theta)$ bei $r = R$ erhalten Sie eine erste Bedingung an die Koeffizienten a_l, b_l. Für große $|\vec{r}|$ sei $\vec{E} = \vec{E}_\infty = E_0\vec{e}_z$. Geben Sie das zugehörige Potential $\Phi_\infty(r,\theta)$ an. Eine zweite Bedingung an die Koeffizienten erhalten Sie aus dem asymptotischen Verhalten von $\Phi(r,\theta)$: $\Phi(r,\theta) \to \Phi_\infty(r,\theta)$ für $r \gg R$. Beide Gleichungen sind vom Typ:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l\, r_0^l + \frac{b_l}{r_0^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) = f(r_0,\theta). \qquad (1)$$

Leiten Sie aus (1) Bestimmungsgleichungen für a_l und b_l für beliebige, auf den Rändern vorgegebene Funktionen $f(r_0, \theta)$ bzw. $g(r_1, \theta)$ ab. Geben Sie das Potential $\Phi(r, \theta)$ für die in dieser Aufgabe betrachtete Situation an ; und zwar für beliebige $r > R$ und $r < R$.

(b) Diskutieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien und skizzieren Sie diese.

(c) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ sowie die Gesamtladung Q auf der Kugel. Interpretieren Sie die Terme, die in $\Phi(r, \theta)$ auftreten. Geben Sie das Potential $\Phi_\sigma(r, \theta)$ der Oberflächenladungen für den Fall $Q = 0$ durch Vergleich mit Ihrem Ergebnis für $\Phi(r, \theta)$ für $r > R$ und $r < R$ an.

Hinweis: die ersten drei Legendre-Polynome lauten:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = \cos(\theta); \quad P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2(\theta) - 1).$$