INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

11. Übungsblatt Abgabe: **Präsenzübung, keine Abgabe**

---

30. **Separationsansatz in kartesischen Koordinaten II**
Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ im Volumen

$$V = \{\vec{r}\,|\,0 \leq x_1 \leq a;\, 0 \leq x_2 \leq b\}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den Randbedingungen:

$$\Phi(0, x_2) = \Phi(a, x_2) = 0; \quad \Phi(x_1, 0) = 0; \quad \Phi(x_1, b) = A_0 + B_0 \sin(\frac{3\pi}{a} x_1).$$

Hinweis: Stellen Sie den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten auf und verwenden Sie den Ansatz $\Phi(x_1, x_2) = U_n(x_1)W_n(x_2)$. Zeigen Sie, dass $U_n(x_1)$ und $W_n(x_2)$ gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen und lösen Sie diese allgemein. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung hat dann die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_n U_n(x_1)W_n(x_2).$$

Bestimmen Sie alle auftretenden Integrationskonstanten aus den Randbedingungen. Dafür benötigen Sie die Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen $S_n = \sin(nx), C_n = \cos(mx)$ (n, m sind ganze Zahlen):

$$\begin{aligned}
\langle S_n \,|\, S_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx\, \sin(nx)\sin(mx) = \delta_{n,m} \\
\langle C_n \,|\, C_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx\, \cos(nx)\cos(mx) = \delta_{n,m} \\
\langle S_n \,|\, C_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx\, \sin(nx)\cos(mx) = 0.
\end{aligned}$$