INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

10. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag, den 22.5.2003, 11.25 Uhr**

26. **Kapazitätskoeffizienten**

    (a) Bestimmen Sie die Kapazitätskoeffizienten und die Kapazität pro Länge L eines Zylinderkondensators der Länge L mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2.
    Hinweis: vernachlässigen Sie Randeffekte, d.h., nehmen Sie zur Berechnung des Potentials an, dass der Zylinderkondensator unendlich lang ist ($L \gg R_2$). Verwenden Sie als Randbedingung, dass das Potential Φ auf der Mantelfläche eines Zylinders mit Radius $R_0 > R_2$ verschwindet. Begründen Sie, warum die angegebene Randbedingung sinnvoll ist.

    (b) Geben Sie die Energiedichte im Inneren des Zylinders an, wenn der innere Mantel mit der Flächenladungsdichte $\sigma_0 = \text{const}$ und der äußere mit $-\sigma_0$ aufgeladen ist. Welche Energie ist in einem (idealen) Zylinderkondensator der Länge L gespeichert?

27. **Separationsansatz in kartesischen Koordinaten I**
Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ im Volumen

$$V = \{\vec{r} \,|\, -a/2 \leq x_1 \leq a/2;\ -b/2 \leq x_2 \leq b/2;\ -\infty \leq x_3 \leq \infty\}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den Randbedingungen:

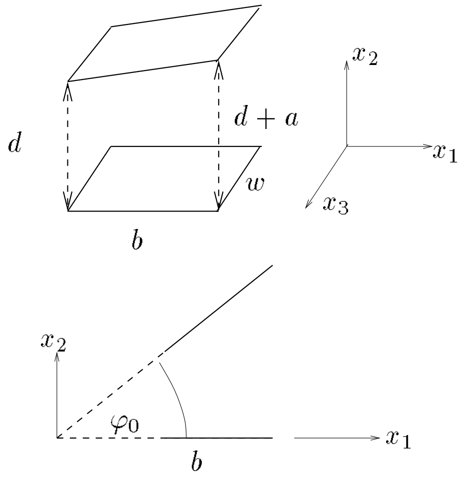
$$\Phi(\pm\frac{a}{2}, x_2, x_3) = \Phi_0 = \text{const}; \quad \Phi(x_1, \pm\frac{b}{2}, x_3) = 0.$$

28. **Kapazitäten**
Wir betrachten den *nicht-ganz-so-parallelen* Plattenkondensator (siehe Skizze). Zwischen den Platten liege die Spannung U an. Berechnen Sie die Kapazität und vernachlässigen Sie dabei Randeffekte. Gehen Sie wie folgt vor:

    (a) Führen Sie Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ein, wobei die z-Achse in der Schnittgeraden der beiden Plattenebenen liege. Begründen Sie, dass das Potential nur von φ abhängt.

    (b) Lösen Sie die Laplace-Gleichung im Volumen zwischen den Platten. Verwenden Sie als Randbedingungen $\Phi(x_1, x_2 = 0, x_3) = 0$ und geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ an.

    (c) Berechnen Sie die Ladung Q auf der Kondensatorplatte bei $x_2 = 0$.



29. **Exkurs: Konforme Abbildungen**
Hinweis: diese Aufgabe ist eine freiwillige Zusatzaufgabe!
Wir betrachten komplexe, differenzierbare Funktionen $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mit $g(z) = U(x_1, x_2) + iV(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$, $z = x_1 + ix_2$ und $U, V : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$. Eine komplexe Funktion ist differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

(a) Betrachten Sie speziell die Wege $z \to z_0$ parallel zur x_1- bzw. x_2-Achse. Zeigen Sie, dass die reellen Funktionen U, V die Laplace-Gleichung erfüllen. Setzen Sie dabei voraus, dass U, V (mindestens) zweimal differenzierbar sind. Aufgrund dieser Eigenschaft ($\Delta U = \Delta V = 0$) nennt man g auch *komplexes Potential.*

(b) Zeigen Sie weiter, dass die Linien U =const und V =const senkrecht aufeinander stehen.

(c) Konforme Abbildungen $f : z = x_1 + ix_2 \mapsto f(z) = u + iv$ sind (zweimal differenzierbare) Funktionen, die die komplexe Ebene (oder Teile davon) in die komplexe Ebene abbilden und die Eigenschaft $df(z)/dz \neq 0$ haben (letzteres impliziert Invertierbarkeit der Funktion). Begründen Sie anhand von Teil (a) und (b), dass, wenn die Linien $u(x_1, x_2) =$ const Äquipotentiallinien in der x_1, x_2-Ebene beschreiben, $v(x_1, x_2) =$ const die zugehörigen Feldlinien ergeben. Das nutzt man bei der Methode der konformen Abbildung aus, um aus einfachen Potentialen $\Phi(x_1, x_2)$, deren Äquipotentialflächen bekannt sind, das Potential komplizierterer Probleme zu erhalten. Dazu betrachtet man eine (geeignet gewählte) konforme Abbildung f und untersucht, auf welche Linien in der komplexen Ebene $\Phi(x_1, x_2) =$ const abgebildet wird.
Sei nun $g(z) = \Phi(x_1, x_2) + i\Psi(x_1, x_2)$ bekannt, dann liefert

$$\tilde{g}(u, v) = \tilde{\Phi}(u, v) + i\tilde{\Psi}(u, v)$$

mit $\tilde{\Phi}(u, v) = \Phi(x_1(u, v), x_2(u, v))$; $\tilde{\Psi}(u, v) = \Psi(x_1(u, v), x_2(u, v))$ das Potential zu den Äquipotentiallinien u =const. Wie hängen Ψ und Φ allgemein zusammen?
Als ein einfaches Beispiel betrachten wir die konforme Abbildung:

$$f(z) = \alpha\, e^{z/\beta}; \alpha, \beta \quad \text{reell}; \quad \alpha > 0.$$

Verwenden Sie diese konforme Abbildung, um aus dem bekannten Potential eines Plattenkondensators (Fläche A, Plattenabstand d, Spannung U) das Potential eines Zylinderkondensators (Innen/Außenradius ρ_1;ρ_2) zu bestimmen. Wie hängen α, β mit den vorgegebenen Parametern $(A, d, U, \rho_1, \rho_2)$ zusammen? Geben Sie Ψ und $\tilde{\Psi}$ an.

(d) Diskutieren Sie die konforme Abbildung $f(z) = u + iv = e^{iz} + (1 + e^{iz})$ mit $z = \varphi + i\psi$. Worauf werden die Linien $(\varphi, \psi) = (\pm\pi, \psi)$ abgebildet? Bestimmen Sie eine Gleichung für die Äquipotentiallinien in der (u, v)-Ebene. Skizzieren Sie diese Linien für $\varphi = \pm\pi, \pm\pi/2, \pm\pi/2, \pm\pi/4$ (Hinweis: dazu könnte ein Plotprogramm hilfreich sein).