INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

9. Übungsblatt Abgabe: **Präsenzübung, keine Abgabe**

---

25. Poisson-Gleichung und Greensche Funktion

Ziel dieser Aufgabe ist die Herleitung der Greenschen Funktion der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$ über die Fouriertransformation. Unter der Fouriertransformation einer Funktion $f(\vec{r}) \mapsto f(\vec{k})$ verstehen wir den Ausdruck

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{R}^3} d^3\vec{r}\; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r}). \tag{1}$$

Die Rücktransformation ist durch

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{R}^3} d^3\vec{k}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{k}) \tag{2}$$

gegeben ($d^3\vec{r}$ ist das Volumenelement im Ortsraum).

(a) Sukzessives Anwenden von Fourier- und Fourierrücktransformation auf $f(\vec{r})$ sollte wieder auf $f(\vec{r})$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\vec{k}) = \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2}\,\rho(\vec{k}) \tag{3}$$

gilt, wenn $\Phi(\vec{r})$ und $\rho(\vec{k})$ die Poisson-Gleichung erfüllen.

(c) Zeigen Sie, dass die Rücktransformation von Gleichung (3) auf die Form

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3\,\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,') \tag{4}$$

führt, wenn man außerdem $\rho(\vec{k})$ Gleichung (1) entsprechend ersetzt. Berechnen Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$.
Hinweis: bei der Herleitung von Gleichung (4) ist die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen. Zur Berechnung der Greenschen Funktion bietet es sich an, im $\vec{k}$-Raum sphärische Polarkoordinaten einzuführen.

$$\int_0^\infty dz \frac{\sin(az)}{z} = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad a > 0$$