INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2003

8. Übungsblatt — Abgabe: **Donnerstag, den 15.5.2003, 11.25 Uhr**

Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184

22. **Poisson-Gleichung und Fouriertransformation**
Ziel dieser Aufgabe ist die erneute Lösung des Problems aus Aufgabe 17 (Potential einer homogen geladenen Kugeloberfläche) über die Fouriertransformation. Unter der Fouriertransformation einer Funktion $f(\vec{r}) \mapsto f(\vec{k})$ verstehen wir den Ausdruck

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{R}^3} d^3\vec{r}\; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r}). \tag{1}$$

Die Rücktransformation ist durch

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{R}^3} d^3\vec{k}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{k}) \tag{2}$$

gegeben ($d^3\vec{r}$ bezeichnet das Volumenelement im Ortsraum).

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\vec{k}) = \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2}\,\rho(\vec{k}) \tag{3}$$

gilt, wenn $\Phi(\vec{r})$ und $\rho(\vec{k})$ die Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$ erfüllen.

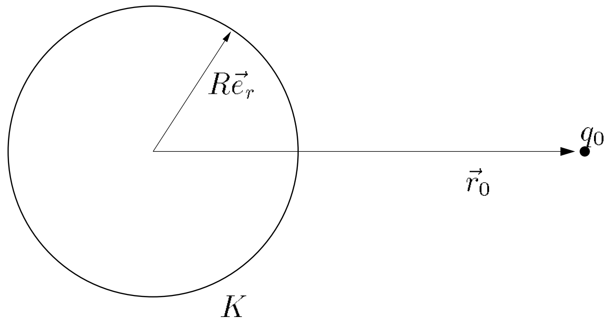
(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\rho(\vec{k})$ der Ladungsverteilung.
Hinweis: $\rho(\vec{r})dV = \sigma_0 r^2 \sin\vartheta\,\delta(r-R)\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$.

(c) Setzen sie Ihr Ergebnis aus Teil (b) in Gleichung (3) ein und bestimmen Sie $\Phi(\vec{r})$ durch Fourierrücktransformation.

Bitte wenden! →

23. **Methode der Bildladung I**

Gegeben sei eine geerdete, metallische Kugel K mit Radius R. Bringt man eine Punktladung q_0 an den Ort $\vec{r}_0$ (siehe Skizze) in die Nähe der Kugel, entsteht auf der Kugeloberfläche eine Influenzladung.



(a) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Außenraum der Kugel mit Hilfe der Methode der Bildladung unter der Randbedingung $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r}\in\partial K} = 0$

(b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel? Begründen Sie, unter welchem Winkel das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel einmündet. Verwenden Sie den Gaußschen Satz, um eine Bestimmungsgleichung für die Influenzladung $\sigma_0(\vec{r})$ aufzustellen. Geben Sie $\sigma_0(\vec{r})$ an. Welches sind die Linien $\sigma(\vec{r}) = \text{const}$ auf der Kugeloberfläche? Skizzieren Sie $\sigma_0(\vec{r})$ in geeigneter Weise.

(c) Bestimmen Sie die influenzierte Gesamtladung durch Integration über die Kugeloberfläche und vergleichen Sie mit der Stärke der Bildladung.

(d) Berechnen Sie die von der influenzierten Ladung ausgeübte Kraft auf die Punktladung q_0 als Funktion von $r_0 = |\vec{r}_0|$, indem Sie die Beiträge von Flächenelementen df auf der Kugeloberfläche aufintegrieren. Was ergibt sich für $r_0 \gg R$?

(e) Nehmen Sie nun an, die Kugel sei nicht mehr geerdet, sondern auf konstantem Potential $\Phi_0 > 0$ gehalten. Wie müssen jetzt Bildladungen gewählt werden, um dieses Randwertproblem zu lösen?

Hinweis: Nutzen Sie bei der Berechnung der auftretenden Integrale die Symmetrie des Problems aus. In Teil (d) könnte Ihnen eine geeignete Substitution und eine Partialbruchzerlegung helfen.

24. **Methode Der Bildladung II**

Bestimmen Sie das Potential Φ im Bereich $\{\vec{r}\,|\,x_1, x_2 > 0; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > R\}$ für die in der Skizze dargestellte Geometrie. Eine Punktladung q befindet sich bei $(a, a, 0)$. Die Metallplatten bei $x_1 = 0, x_2 = 0$ sowie die Kugel um den Ursprung mit Radius R seien geerdet. Zeigen Sie insbesondere auch, dass $\Phi = 0$ für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und auf der Oberfläche der Kugel erfüllt ist.