INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2003

4. Übungsblatt — Abgabe: **Donnerstag, den 24.4.2003, 11.25 Uhr**

Fragen zu den Übungsaufgaben: F. Heidrich-Meisner, Raum A 313, Tel. 391-5184

---

8. **Wegunabhängigkeit**

   (a) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2\vec{e}_1+x_1\vec{e}_2)$ mit $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Zeigen Sie: $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = 0$ für $x_1^2+x_2^2 \neq 0$. Berechnen Sie ferner das Linienintegral $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, wobei C der Rand eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{M} = a\vec{e}_3$ ist. $\vec{e}_3$ steht senkrecht auf der von C eingeschlossenen Kreisfläche.

   (b) Zeigen Sie, dass die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}_2(\vec{r}) = \vec{r}/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}$ für alle $|\vec{r}| \neq 0$ verschwindet. Betrachten Sie dann eine Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Verifizieren Sie die Wegunabhängigkeit von $\vec{F}_2$ für die Kurven mit $|\vec{r}| = R$ und $\vec{r} \cdot \vec{e}_3 = b$.

   (c) Offensichtlich haben beide Vektorfelder eine verschwindende Rotation unter den angegebenen Voraussetzungen. Sind beide Felder konservativ? Kommentieren Sie Ihre Antwort.

9. **Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten**

   (a) Bestimmen Sie die kovarianten Basisvektoren $\vec{b}_i$ für Kugelkoordinaten. Als Konvention vereinbaren wir $(u^1, u^2, u^3) = (r, \vartheta, \varphi)$ und $\vartheta \in [0, \pi[$. Ermitteln Sie die kontravarianten Basisvektoren aus $\vec{b}^i = g^{ij}\vec{b}_j$. Verifizieren Sie die Formeln

   $$\vec{b}^i = \frac{\vec{b}_j \times \vec{b}_k}{\sqrt{\det g}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\det g} = \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3).$$

   mit $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ und zyklisch. $\det g$ bezeichnet die Determinante des metrischen Tensors (kovariante Komponenten!).

   (b) Geben Sie den Gradienten $\vec{\nabla} = \vec{b}^i \frac{\partial}{\partial^i}$ an und stellen Sie $\vec{\nabla}$ zusätzlich bezüglich der kovarianten Basis dar. Schlagen Sie den Ausdruck für den Gradienten in Kugelkoordinaten im Bronstein nach. Wodurch unterscheidet sich letzterer von Ihrem Ergebnis?

   (c) Geben Sie, ausgehend von $\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i\sqrt{\det g}\, g^{ij}\partial_j$, den Laplaceoperator in kartesischen und Kugelkoordinaten an. Unter welchen Bedingungen ist die Schreibweise $\Delta = \partial_i\partial^i$ gerechtfertigt?

10. **Lorentz-Transformation I**

    Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ haben zwei Inertialsysteme (IS) Σ und Σ' den gleichen Ursprung und parallele x_3-Achsen. Der Winkel zwischen der x_1- und der x'_1-Achse beträgt $\alpha > 0$ bei $t = t' = 0$. Geben Sie die Lorentz-Transformation zwischen diesen beiden Inertialsystemen in der Form $x'_\mu = f(x_1, x_2, x_3, t)$ an, wobei die Relativgeschwindigkeit aus der Sicht von Σ $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ ist.