Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2003

3. Übungsblatt Abgabe: **Präsenzübung, keine Abgabe**

5. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten**
Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten u^1, u^2, u^3 betrachten wir (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten):

$$x^1 = a\,u^1 \cos(u^2); \quad x^2 = b\,u^1 \sin(u^2); \quad x^3 = c\,u^3\,; \quad a, b, c \neq 0.$$

   (a) Stellen Sie die ko- und kontravariante Basis ($\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ bzw. $\{\vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3\}$) sowie den metrischen Tensor auf. Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der x^1x^2-Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die kontra- und kovarianten Basisvektoren in den Punkten $(u^1, u^2) = (1, \pi/4)$ und $(u^1, u^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $u^1 = \text{const}$ bzw. $u^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten? Was ergibt sich für den metrischen Tensor und die Basisvektoren im Fall $a = b = c = 1$?

   (b) Im Punkt $P = (u^1, u^2) = (1, \pi/4)$ haben zwei Vektorfelder $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ bezüglich kartesischer Einheitsvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die Darstellung: $\vec{E}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$; $\quad \vec{E}_2 = 2\vec{e}_2$. Stellen Sie diese Vektoren bezüglich $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ und $\{\vec{b}^1, \vec{b}^2\}$ dar. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ in kartesischen Koordinaten und in den Koordinaten u^1, u^2.

   (c) Bestimmen Sie den Laplace-Operator in den Koordinaten u^1, u^2, u^3.

6. **Diracsche δ-Funktion**
Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0). \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$d_l(x) := \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   normiert sind (d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l[f] := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, d_l(x - x_0) f(x),$$

   wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
   Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

   (b) Verfahren Sie analog zu Teil (a) mit den Funktionen

$$g_l(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,l} \exp(-x^2/(2l^2)).$$

(c) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}[f] := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\vec{r}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3); \quad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Berechnen Sie:

i. $\int dV\, \vec{r}\rho(\vec{r})$ mit $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$; $V = \mathcal{R}^3$.

ii. $\int dV\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\delta(\vec{r}) = 1$; $V = \mathcal{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).