INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2003

1. Übungsblatt — Abgabe: **Präsenzübung, keine Abgabe**

---

1. **Integralsätze**
   (a) Verifizieren Sie den Stokesschen Satz für das Vektorfeld
   $$\vec{A} = \left(\frac{4}{3}x_1 - 2x_2\right)\vec{e}_1 + (3x_2 - x_1)\vec{e}_2$$
   und die Fläche $F = \{\vec{r}\,|\,(x_1/3)^2 + (x_2/2)^2 \leq 1; x_3 = 0\}$ $(\vec{r} = (x_1, x_2, x_3))$.

   (b) Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld
   $$\vec{A} = ax_1\vec{e}_1 + bx_2\vec{e}_2 + cx_3\vec{e}_3$$
   und die Kugel $K = \{\vec{r}\,|\,x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$.

2. **Differentialoperatoren**
   Ψ sei ein skalares Feld; $\vec{A}$ und $\vec{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{div}\,(\Psi\vec{A}) = \Psi\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\Psi$.

   (b) $\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$.

   (c) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\,\vec{A}$.

   Verwenden Sie dabei die Komponentenschreibweise und Einsteinsche Summenkonvention.

3. **Kraftfelder**
   Betrachten Sie die Felder
   $$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4x_2^2 + 3x_3 \\ 8x_1x_2 - 8x_3^3 \\ -24x_2x_3^2 + 3x_1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} x_3x_1 + 3x_1 \\ 3x_2x_3 \\ x_2^2 + x_3^4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Welches der Kraftfelder ist konservativ? Bestimmen Sie, falls existent, das Potential V. Skizzieren Sie, falls von $\vec{0}$ verschieden, $\mathrm{rot}\vec{F}$.

   (b) Berechnen Sie für beide Felder das Wegintegral $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ zwischen den Punkten $(0,0,0)$ und $(1,0,1)$ und zwar längs der Wege:
   - $C_1 : (0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,0,1)$,
   - $C_2 : (0,0,0) \rightarrow (1,0,1)$ mit $x_3 = x_1$,
   - $C_3 : (0,0,0) \rightarrow (1,0,1)$ mit $x_3 = x_1^2$.

   (c) Besitzt $\vec{F}_2$ ein Potential, wenn man den Definitionsbereich auf die x_1x_2-Ebene einschränkt?