INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2002

15. Übungsblatt — Abgabe: **Wiederholung, keine Abgabe**

Wer noch Hausaufgabenpunkte benötigt, kann die Rechenaufgaben auf diesem Blatt bearbeiten und bis Dienstag, den 9.7.02 (14 Uhr), abgeben und erhält dafür Zusatzpunkte.

1. **Poyntingscher Satz**
   Leiten Sie den Poyntingschen Satz für elektromagnetische Felder in linearen Medien ab, indem Sie von der Gleichung: $dU_{\mathrm{mech}}/dt = \int dV\, \vec{j} \cdot \vec{E}$ ausgehen. Diskutieren und benennen Sie die Größen, die im Poyntingschen Satz auftreten.

2. **Magnetisierter Ring mit Spalt**
   Betrachten Sie den magnetisierten Ring aus Aufgabe 34 und nehmen Sie an, der Ring sei durch einen Spalt der Breite d unterbrochen. Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ im Spalt und im Inneren des Ringes.
   Hinweis: die Spaltbreite sei klein verglichen mit dem Radius des Rings.

3. **Induktionskoeffizienten**
   Bestimmen Sie den Gegen-Induktionskoeffizienten L_{12} zweier infinitesimal dünner Kreisringe mit Radius R, die parallel zueinander und senkrecht zur $z-$Achse angeordnet sind. Der Abstand beträgt d. Die Mittelpunkte der Kreisringe sind $\vec{M}_1 = \vec{0}; \vec{M}_2 = d\,\vec{e}_z$.
   Hinweis: Parametrisieren Sie die Kreisringe geeignet und stellen Sie das zu berechnenede Integral auf. Dieses muß nicht berechnet werden.

4. **Multipolentwicklung I**
   Bestimmen sie jeweils das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der nachfolgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs. Geben Sie außerdem den Beitrag der einzelnen Momente zum skalaren Potential $\Phi(\vec{r})$ an.

   (a) Auf den Ecken eines Würfels der Kantenlänge a befinden sich Ladungen $\pm q$. Je zwei benachbarte Ladungen haben unterschiedliches Vorzeichen. Die Ladungen seien symmetrisch um den Koordinatenursprung verteilt.

   (b) Ein Quader mit Seitenlängen a, b, c sei homogen geladen. Der Koordinatenursprung liegt im Mittelpunkt des Quaders.

   (c) Der Quader aus Teil b) trage jetzt die Ladungsdichte $\rho(x_3) = -\alpha x_3$, $\alpha =$ const.

5. **Multipolentwicklung II**
   Betrachten Sie zwei Ladungsverteilungen ρ_1, ρ_2, die sich in großem Abstand R voneinander befinden mögen. Entwickeln Sie das Wechselwirkungspotential

$$\Phi = \int_{V_1} d^3 r_1 \int_{V_2} d^3 r_2\, \frac{\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

bis zur 3. Ordnung in $1/R$ und drücken Sie Ihr Ergebnis durch die Multipolmomente der beiden Ladungsverteilungen aus. Was ergibt sich hier in führender Ordnung für die Kraft zwischen zwei Ladungsverteilungen, die jeweils Gesamtladung 0 haben?
Hinweis: Legen sie den Koordinatensprung in einen beliebigen Punkt im Volumen V_1 der Ladungsverteilung ρ_1. Wählen Sie einen weiteren beliebigen Punkt im Volumen V_2 und bezeichnen Sie dessen Ortsvektor mit $\vec{R}, |\vec{R}| = R$.

6. **Rotierende Kugel**
Bestimmen Sie aus den retardierten Potentialen das elektrische und das magnetische Feld für eine homogen geladene Kugel mit Radius R, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Beschränken Sie sich dabei auf die Raumpunkte $\vec{r}$ außerhalb der Kugel ($|\vec{r}| > R$).

7. **Retardierte Potentiale I**
Ein homogen geladener Stab der Länge L infinitesimaler Dicke bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \vec{e}_1$. Bestimmen Sie die Felder aus den retardierten Potentiale. Betrachten Sie die Fälle, dass der Stab (i) parallel zu $\vec{v}$ liegt; (ii) senkrecht zu $\vec{v}$ liegt.
Hinweis: nutzen Sie Ihre Kenntnis des Viererpotentials im Ruhesystem des Stabes aus (vgl. Blatt 9, Aufgabe 6a)!

8. **Retardierte Potentiale und Eichungen**
Zeigen Sie, dass die retardierten Potentiale die Lorentzeichung erfüllen

9. **Polarisation ebener Wellen in homogenen Medien**
Gegeben sei ein linearer, homogener und ungeladener Isolator.
   (a) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$?
   (b) Zeigen Sie, dass $\vec{B}$ die homogene Wellengleichung ($\Delta - \frac{(\mu\epsilon)}{c_0^2}\partial_t^2)\vec{B} = \vec{0}$ erfüllt.
   (c) Das elektrische Feld sei als ebene Welle in der Form
   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{5}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)e^{i(kx_3 - \omega t)}; \quad \vec{k} = k\,\vec{e}_3$$
   vorgeben. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ und geben Sie deren Polarisation an.
   (d) Die magnetische Induktion sei als ebene Welle vom Typ
   $$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 \cos(kx_3 - \omega t)\vec{e}_1 + B_0 \sin(kx_3 - \omega t)\vec{e}_2$$
   vorgegeben. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und geben Sie die Polarisation von $\vec{E}$ an.

10. **Kugelwellen im Vakuum**
Gegeben sei eine Kugelwelle: $\vec{E} = (\vec{E}_0/r)\exp(i(kr - \omega t))$; $r = |\vec{r}|$.
   (a) Geben Sie die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$ für Kugelwellen im Vakuum an.
   (b) Leiten Sie die folgende Eigenschaft von Kugelwellen direkt aus den Maxwellschen Gleichungen ab: $\vec{k}, \vec{B}, \vec{E}$ stehen paarweise senkrecht aufeinander.
   (c) Sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Phase?
   (d) Berechnen Sie den Poyntingschen Vektor.