INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2002

14. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 2.7.2002, bis 11.25 Uhr**

---

2. Klausur: Die zweite Klausur findet am Mittwoch, den 10.7.2002, von 9-12 Uhr in den Hörsälen MS 3.1 (Gruppe 1 & Gruppe 2) und MS 3.3 (Gruppe 3) statt. Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen; Papier wird gestellt.

Termine: In der nächsten Woche finden die Übungen für alle Gruppen am Dienstag, den 2.7.02, von 13:15-14:45 Uhr statt (Gruppe 1: A318, Gruppe 2: A311, Gruppe 3: A415). Am Mittwoch, den 3.7.02, bieten wir um 14:00-15:30 Uhr eine **Präsenzübung** für alle Gruppen an (MS 3.3). Die Zusatzübung an diesem Mittwoch entfällt.
Dieses Aufgabenblatt wird am Donnerstag, den 4.7.02, in einer **großen Übung** (11:30-13:00 Uhr, MS3.1) besprochen und korrigiert zurückgegeben. Die Vorlesung findet am Donnerstag, den 4.7.02, nicht statt.

---

39. **Elektromagnetische Wellen in einem uniaxialen Dielektrikum**
Betrachten Sie einen Dielektrikum mit $\underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{1}}$ und dem Dielektrizitätstensor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_1 \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um einen uniaxialen Kristall handelt.
Hinweis: Bestimmen Sie das Hauptachsensystem von $\underline{\underline{\epsilon}}$ und zeigen Sie, dass es einen zweifach entarteten Eigenwert gibt. Geben Sie explizit die Transformation an, die $\underline{\underline{\epsilon}}$ auf Diagonalform bringt.

(b) Zeigen Sie, dass die Flächen konstanter Energiedichte in Abwesenheit von Magnetfeldern Rotationsellipsoiden im $\vec{E}$-Raum sind (*Fresnel-Ellipsoide*). Geben Sie die Halbachsen an. Zeigen Sie außerdem, dass die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ bei gegebenem $\vec{E}$ senkrecht auf der Oberfläche des zugehörigen Fresnel-Ellipsoiden steht.

(c) Zeigen Sie, dass der Energietransport im allgemeinen, dass heißt für beliebige Eigenwerte von $\underline{\underline{\epsilon}}$ nicht in Ausbreitungsrichtung erfolgt. Leiten Sie zunächst aus den Maxwell-Gleichungen ab, dass $\vec{H} \cdot \vec{D} = 0$ und $\vec{H} \cdot \vec{E} = 0$ gilt und folgern Sie daraus, dass $\vec{S} \nparallel \vec{k}$ ist ($\vec{S}$ ist der Poynting-Vektor). Geben Sie eine Gleichung für den Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{S}$ an.
Hinweis: Bestimmen Sie $\vec{D} \cdot \vec{E}$ und $\vec{k} \cdot \vec{S}$ für ebene Wellen aus den Maxwellschen Gleichungen. Begründen Sie, dass $\vec{D}, \vec{H}, \vec{E} \sim \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ gilt.
Zeigen Sie außerdem: $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -|\vec{k}|^2 \vec{E} + (\vec{k} \cdot \vec{E})\, \vec{k}$.

Bitte wenden! →

(d) Im folgenden diskutieren wir die Ausbreitung ebener Wellen $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ in einem Dielektrikum mit $\underline{\underline{\epsilon}}$ aus Gleichung (1).

i. Wie lauten die Maxwell-Gleichungen für diesen Fall? Leiten Sie die folgende Gleichung für $\vec{E}$ ab, ohne ein spezielles Koordinatensystem zu wählen:

$$-|\vec{k}|^2 \vec{E} + (\vec{k}\cdot\vec{E})\,\vec{k} = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{\underline{\epsilon}}\cdot\vec{E}. \tag{2}$$

c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für ebene Wellen, die sich:

- parallel zur Symmetrieachse ($z-$Achse) des Kristalls ausbreiten. $(\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(kz - \omega t))$.
- mit $\vec{E} = (E_{0,x}\vec{e}_x + E_{0,z}\vec{e}_z)\exp(i(ky - \omega t))$ senkrecht zur $z-$Achse ausbreiten.
- mit beliebigem $\vec{E}_0$ und $\vec{k}$ im Kristall ausbreiten $(\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)))$. Wieviele propagierende Moden gibt es? Welchen Winkel bilden $\vec{k}$ und $\vec{E}$ jeweils und wie ist die Welle polarisiert?

ii. Wie bestimmt man bei bekanntem $\vec{E}$ das Magnetfeld $\vec{H}$?

Hinweis: verwenden Sie das Hauptachsensystem von $\underline{\underline{\epsilon}}$ als Koordinatensystem.