INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2002

13. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 25.6.2002, bis 11.25 Uhr**

37. **Brechung und Reflexion an einer ebenen Grenzfläche**
Eine ebene, elektromagnetische Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \vec{H} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$$

treffe bei $z = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen Dielektrika mit Dielektrizitätskonstante $\epsilon_1 \neq 1, \epsilon_2 \neq 1$ und den Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\vec{e}_z$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ bei $z = 0$ erfüllen?

(b) Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\vec{E}^{R,T} = \vec{E}_0^{R,T} \, e^{i(\vec{k}^{R,T}\cdot\vec{r}-\omega^{R,T} t)}.$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\omega = \omega^R = \omega^T \tag{1}$$

$$|\vec{k}^R| = |\vec{k}|; \qquad |\vec{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}|\vec{k}| \tag{2}$$

$$k_y = k_y^T = k_y^R = 0; \qquad k_x = k_x^T = k_x^R \tag{3}$$

Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz ($k_z^R = -k_z$) und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(c) Folgern Sie aus den Maxwellschen Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\mathrm{TE-Welle:} \quad \{E_y, H_x, H_z\} \quad \mathrm{TM-Welle:} \quad \{H_y, E_x, E_z\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

(d) Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so um, dass sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\vec{E}_0^R$ und $\vec{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TE-Welle die Verhältnisse $t = |\vec{E}_0^T|/|\vec{E}_0|$ und $r = |\vec{E}_0^R|/|\vec{E}_0|$ und stellen Sie diese als Funktion von ϕ (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 4$ und $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1.5$. Diskutieren Sie den Verlauf.

(e) Betrachten Sie den Fall, dass das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel ϕ_{total},

ab dem Totalreflexion eintritt. Folgern Sie aus (2), dass k_z^T für $\phi > \phi_{total}$ imaginär wird. Beschreiben Sie in Worten die Ortsabhängigkeit der transmittierten Welle für $\phi > \phi_{total}$. Zeigen Sie außerdem, dass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung δ^R, δ^T bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie δ^R und δ^T als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \phi^R$. Geben Sie reelle Lösungen für $\vec{E}^T(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}^T(\vec{r}, t)$ für $\phi > \phi_{total}$ an. Berechnen Sie im Bereich der Totalreflexion den Poyntingvektor $\vec{S}$ im Medium 2 und bilden Sie das zeitliche Mittel von S_z^T.
Hinweis: bei der Berechnung von $\vec{S}$ müssen reelle Felder verwendet werden! Bei der Mittelwertbildung können Sie sich auf die Stelle $x = 0$ beschränken.

38. **Hohlraumresonator**

(a) Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt ($0 < x < a, 0 < y < b$). Welche Randbedingungen müssen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen? Was bezeichnet man beim Hohlleiter als TM- und TE-Welle? Geben Sie die jeweils niedrigste Frequenz an. Skizzieren Sie die Dispersion $\omega(k)$.

(b) Der Hohlleiter werde nun bei $z = 0$ und $z = d$ durch Metallplatten abgeschlossen (Hohlraumresonator). Welche weiteren Randbedingungen ergeben sich? Bestimmen Sie die möglichen Eigenschwingungen (also $\vec{E}$ und $\vec{B}$) des Hohlraumes durch Überlagerung der aus der Vorlesung bekannten Lösungen für einen Hohlleiter zu stehenden Wellen. Welches ist für $a < b < d$ die Eigenschwingung niedrigster Frequenz? Wievielfach entartet ist die Eigenschwingung niedrigster Frequenz für einen würfelförmigen Resonator? Geben Sie für $a = 1cm, b = 2cm, d = 4cm$ die vier niedrigsten Eigenfrequenzen an. Gibt es dabei Entartungen?
Hinweis: zwei Moden sind entartet, wenn die Frequenz die gleiche ist, die Felder aber unterschiedlich sind, und sich dabei nicht nur um einen Faktor unterscheiden.

(c) Berechnen Sie B_x, B_y, E_x, E_y, E_z für folgendes, vorgegebenes B_z:

$$B_z(y, z) = \cos(\pi y)\sin(\pi z/4)\cos(\omega t).$$

Welchen Wert hat ω, wenn a, b, d die gleichen Zahlenwerte wie in Teil (b) haben? Verifizieren Sie alle Maxwell-Gleichungen. Plotten Sie die Vektorfelder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ für ein festes t im Hohlraum und diskutieren Sie deren Verlauf. Wo würden Sie eine Bohrung in der Begrenzungsfläche des Resonators anbringen, um mit einer Hallsonde ein möglichst grosses Signal zu erhalten?