Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

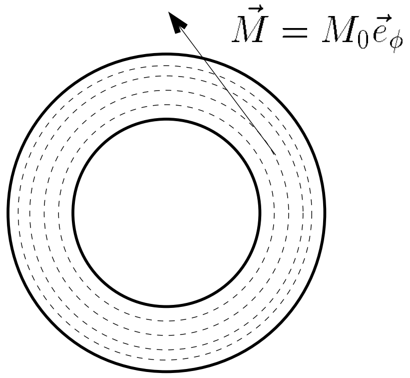
KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2002

12. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 18.6.2002, bis 11.25 Uhr**

33. **Induktionskoeffizienten**
Bestimmen Sie den gegenseitigen Induktionskoeffizienten L_{12} zweier paralleler Drähte der Länge L. Der Abstand der Drähte sei d; die Drähte sollen nicht gegeneinander verschoben sein.

34. **Magnetisierung**

Ein Ring sei mit der konstanten Magnetisierung $\vec{M} = M_0\vec{e}_\phi$ magnetisiert worden (siehe Skizze). Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ im ganzen Raum unter der Randbedingung, dass die Felder im Unendlichen verschwinden mögen.
Hinweis: Überlegen Sie sich die Randbedingungen für $\vec{H}$ und $\vec{B}$.



35. **Fouriertransformation**

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte zu $f(x) = \exp(-x^2/a^2)$.
Hinweis: verwenden Sie eine quadratische Ergänzung, um das folgende, bestimmte Integral zu erhalten: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f_1(\tau)\, f_2(t-\tau),$$

wobei die Funktionen f_1, f_2 durch $f_1(t) = \sqrt{a/\pi}\exp(-at^2)$ bzw. $f_2(t) = \sqrt{b/\pi}\exp(-bt^2)$ mit $a, b > 0$ gegeben seien.
Hinweis: verwenden Sie den Faltungssatz.

(c) **Wärmeleitungsgleichung**
Lösen Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$$

für $t > 0$ mit den Randbedingungen $u(x, t = 0) = f(x)$, indem Sie eine Fouriertransformation bezüglich x durchführen. Sie erhalten eine DGL für $u(k,t)$ in t, die sich elementar integrieren lässt. Geben Sie $u(x,t)$ für beliebiges $f(x)$ und für $f(x) = f_0 = \text{const}$ bzw. $f(x) = f_0 \exp(-\alpha x^2)$; $\alpha > 0$ an.
Bemerkung: $u(x,t)$ ist physikalisch entweder als Energiedichte oder Temperaturfeld zu interpretieren.

Bitte wenden! →

36. **Wellenausbreitung in Isolatoren**
Betrachten Sie die Ausbreitung ebener Wellen in einem Isolator mit frequenzabhängigier Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ und konstanter Permeabilität $\mu = 1$.

(a) Der Brechungsindex n kann im allgemeinen komplex sein, wenn $\epsilon(\omega)$ komplex ist. Drücken Sie den Real- und den Imaginärteil von n durch den Real- und Imaginärteil von ϵ aus. Welche Konsequenz ergibt sich für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Isolator, wenn n komplex ist?
Hinweis: Es gilt $n = n' + i\,n'' = \sqrt{\epsilon_1 + i\epsilon_2}$.

(b) Bestimmen Sie die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon(\omega)$ im Oszillatormodell und berücksichtigen Sie einen Dämpfungsterm, d.h.:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_T^2 x(t) = \frac{q}{m}E(t).$$

Skizzieren Sie den Real- und Imaginärteil von $\epsilon(\omega)$ für $\gamma/\omega_T = 0, 0.1, 0.5, 1, 10$. Geben Sie die Dispersion $\omega(k)$ an und plotten Sie diese für die gleichen Werte von γ/ω_T. Kommentieren Sie den Verlauf von $\omega(k)$ und erklären Sie das Verhalten von $\omega(k)$ im Grenzfall $\gamma \gg \omega_T$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Polarisierbarkeit α ($\vec{p} = \alpha\vec{E}$, $\vec{p}$: Dipolmoment) und nehmen Sie an, dass die Dichte der Dipole konstant ist.

(c) Zeigen Sie (für $\gamma = 0$), dass gilt:

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty}.$$

Dabei ist: $\epsilon(\omega_L) = 0$; $\epsilon(\omega = 0) = \epsilon_0$ und $\lim_{\omega\to\infty}\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty$.

(d) Natriumfluorid (NaF) hat die statische Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0 = 5.05$ und die optische Dielektrizitätskonstante beträgt $\epsilon_\infty = 1.74$. Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x_1, t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(x_1, t)$ für ebene Wellen an, die sich mit der Frequenz $\omega = 1.5\,\omega_T$ in einem NaF-Kristall mit $\vec{k} \sim \vec{e}_1$ ausbreiten.
Hinweis: nehmen Sie die Gültigkeit des Oszillatormodells an und vernachlässigen Sie den Dämpfungsterm, d.h., es gelte $\gamma = 0$.

(e) Im Oszillatormodell ist $\epsilon_\infty = 1$, wohingegen in der Natur $\epsilon_\infty > 1$ beobachtet wird (vgl. Teil d). Welche Ursachen sind denkbar?

(f) Nehmen Sie an, es gäbe in einem Isolator mehr als eine transversale Frequenz $\omega_{T,i}$ (dies entspricht unterschiedlichen Rückstellkräften $-D_i x$ im Oszillatormodell). Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf von $\epsilon(\omega)$ für kleine Dämpfungen $\gamma \ll \omega_{T,i}$.