INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2002

9. Übungsblatt — Abgabe: **keine Abgabe**

Wer möchte, kann die Rechenaufgaben auf diesem Blatt bis Dienstag, den 28.5.02, abgeben und so Zusatzpunkte für die Hausaufgaben erlangen.

---

1. **Wissensfragen**

   (a) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum?

   (b) Wie transformiert man die kovarianten Komponenten eines Vektors in seine kontravarianten Komponenten?

   (c) Geben Sie die Minkowski-Metrik an.

   (d) Geben Sie den relativistischen Vierer-Impuls an.

   (e) Wann nennt man den Abstand zweier Ereignisse in der Raumzeit raumartig bzw. zeitartig?

   (f) Geben Sie die Quellen und Wirbel des elektrischen Feldes in der Elektrostatik an!

   (g) Wie bestimmt man die Kapazitätskoeffizienten einer Verteilung metallischer Körper?

   (h) Geben Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für $\Delta G(\vec{r}, \vec{r})' = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ an!

   (i) Welchen Ansatz macht man für die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ bei von Neumann-Randbedingungen?

   (j) Geben Sie die Ladungsdichte von 10 Punktladungen $q_1, \ldots, q_{10}$ an, die sich an den Orten $\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_{10}$ befinden mögen!

   (k) Wie lauten die Legendre-Polynome $P_0(\cos\theta)$ und $P_1(\cos\theta)$?

   (l) Geben Sie das Potential im Inneren eines Plattenkondensators an, wenn die eine Platte auf dem Potential Φ_1 und die andere auf dem Potential Φ_2 gehalten wird.

   (m) Was versteht man unter einer Eichtransformation?

   (n) Welche Gleichung erfüllt das Viererpotential, wenn die Strahlungseichung gewählt wurde?

   (o) Geben Sie die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum an.

2. **Sphärische Polarkoordinaten**
   Berechnen Sie den metrischen Tensor für sphärische Polarkoordinaten sowie die kontra- und kovarianten Basisvektoren. Skizzieren Sie in den Punkten $(x^1, x^2, x^3) = (1, 0, 0)$ und $(x^1, x^2, x^3) = (1/2, 1/2, 0)$ die kontravariante Basis und die Koordinatenlinien in der x_1, x_2-Ebene.

3. **Spezielle Relativitätstheorie**

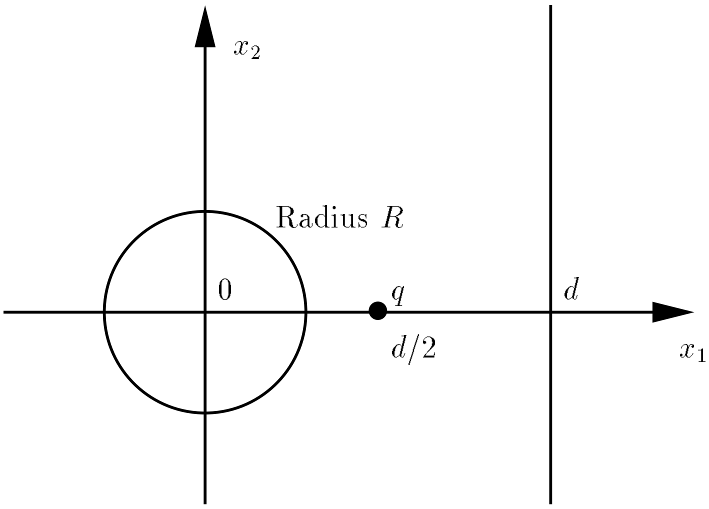
   (a) Behandeln Sie den Compton-Effekt relativistisch.

   (b) Ein instabiles Teilchen zerfalle in seinem Ruhesystem mit der Lebensdauer t_0. Welche Lebensdauer mißt ein mit v relativ dazu bewegter Beobachter in seinem Inertialsystem?

4. **Methode der Bildladung**

(a) Vor einer unendlich ausgedehnten (und somit geerdeten) metallischen Platte bei $x_1 = 0$ befinden sich zwei Punktladungen q und $2q$ an den Orten $(a, a, 0)$ bzw. $(a, -a, 0)$. Geben Sie das Potential im Bereich $x_1 > 0$ und die Oberflächenladungsdichte σ auf der Metallplatte an.
Zusatz: Gibt es eine Äquipotentialfläche $x_2 = \text{const}$?

(b) Bestimmen Sie das Potential Φ für die nebenstehende Skizze. Die Kugel und die Metallplatte seien metallisch und geerdet.



5. **Kugelsymmetrische Probleme**
Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R sei mit der konstanten Flächenladungsdichte σ_0 aufgeladen. Berechnen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| < R$ und $|\vec{r}| > R$ unter der Randbedingung $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} \Phi(\vec{r}) = 0$. Verwenden Sie dabei:

   (a) die Lösungsformel für die Poisson-Gleichung.

   (b) den Gaußschen Satz.

   (c) die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung für kugelsymmetrische Probleme.

   Wie groß ist die Kapazität der Kugel gegenüber dem Unendlichen?

6. **Unendlich langer Draht**

   (a) Berechnen Sie das Potential eines Drahtes der Länge L, der die Linienladungsdichte λ trage. Geben Sie zunächst die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an!

   (b) Betrachten Sie jetzt einen unendlich langen Draht. Man zeige, dass das Poisson-Integral

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}\,'^{\,3} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

   divergiert, dass jedoch das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla\Phi$ mit Hilfe des Poisson-Integrals berechnet werden kann. Man überprüfe das Ergebnis für $\vec{E}$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes. Warum ist das Poisson-Integral hier für Φ nicht anwendbar?

(c) Zeigen Sie, dass sich die Laplace-Gleichung für die Situation aus Aufgabenteil b) auf eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung reduziert und lösen Sie diese allgemein.

7. **Lösungen der Laplace-Gleichung**
Stellen Sie den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) auf. Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält man mit einem Separationsansatz $\Phi(r, \phi, z) = G(r)H(\varphi)F(z)$? Sind Ihnen Lösungen dieser DGLn bekannt? Zeigen Sie insbesondere, dass $G(r)$ eine Lösung der Bessel-DGl ist. Geben Sie die allgemeine Lösung der laplace-Gleichung für zylindersymmetrische Probleme an.

8. **Legendre-Polynome**
Stellen Sie das (bekannte) Potential einer Punktladung q, die sich am Ort $\vec{r}_0 = r_0\vec{e}_z; r_0 \neq 0$ befindet, durch Legendre-Polynome dar. Was ergibt sich für $r_0 = 0$?
Hinweis: Unterscheiden Sie die Bereiche $r > r_0$ und $r < r_0$. Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten, indem Sie die Kenntnis von $\Phi(r, \theta = 0)$ ausnutzen. Verwenden Sie (ohne Beweis) $P_l(1) = 1$.

9. **Wasserstoffproblem**
Für die mittlere Elektronendichte in einem einfachen Modell des Wasserstoff-Atoms kann man den Ansatz

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3}\exp(-2r/a)$$

machen (a ist der Bohrsche Radius). Die Kernladung stellt man sich als Punktladung vor. Bestimmen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld sowie die Gesamtladung Q, die in einer Kugel vom Radius $R > a$ eingeschlossen ist. Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

10. **Lorentz-Invarianten**

(a) Was ist die physikalische Bedeutung von $F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}$? Ist diese Größe ein Lorentz-Skalar?

(b) Stellen Sie für den Fall der speziellen Lorentztransformation die Transformationsgleichung für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf und zeigen Sie mit Hilfe dieser Transformationsgleichungen, dass $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ein Lorentz-Skalar ist.