INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2002

8. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 28.5.2002, bis 11.25 Uhr**

Hinweise zur 1. Klausur: die erste Klausur findet am Mittwoch, den 29.5.02, von 14:00-16:00 Uhr statt und zwar in den Hörsälen MS 3.1 (Gruppe 1 & 3) und MS 3.3 (Gruppe 2). Hilfsmittel sind **nicht** zugelassen; Papier wird gestellt.
Termine: für die Gruppen 2 und 3 bieten wir am Dienstag, den 28.5.02, von 13:15-14:45 Uhr Übungstermine an (Gruppe 2 im Raum A 415, Gruppe 3 im Raum A 311). Die Zusatzübung am Mittwoch, den 29.05.02, entfällt.

24. **Eichinvarianz**

(a) Gegeben sei das Vektorpotential

$$\vec{A} = ((6x-1)y+z, 3x^2 - z + x, x - y).$$

Bestimmen und skizzieren Sie das magnetische Feld. Geben Sie die Quellen und Wirbel von $\vec{B}$ an. Das Vektorpotential legt das elektrische Feld noch nicht fest. Welche Bedingungen an das elektrische Feld ergeben sich hier aus den Maxwellschen Gleichungen? Berechnen Sie div$\vec{A}$. Geben Sie eine Eichtransformation an, so dass die Coulomb-Eichung erfüllt ist.

(b) Betrachten Sie jetzt folgende Potentiale:

$$\vec{A} = \frac{a}{c}(-z^2/2 + 2x + z, (x+2)y, x); \quad \Phi = -axt; \quad a = \text{const}.$$

i. Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sowie die Wirbel und Quellen der Felder. Skizzieren Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Was erhalten Sie für die Stromdichte $\vec{j}$ und die Ladungsdichte ρ?

ii. Erfüllen das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential Φ die Lorentzeichung? Wenn nicht, geben Sie eine Eichtransformation $(\vec{A}, \Phi) \to (\vec{A}', \Phi')$ an, so dass $\vec{A}'$ und Φ' die Lorentzeichung erfüllen.

25. **Lösungen der Wellengleichung**
Wir betrachten die homogene Wellengleichung im Vakuum:

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = 0 \quad \Delta A_i(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_i(\vec{r},t) = 0; \quad i = 1,2,3.$$

($\vec{A}$ und Φ erfüllen also die Lorentzbedingung.)

(a) Zeigen Sie durch direktes Einsetzen in die Wellengleichung, dass Kugelwellen $\Phi(\vec{r},t) \sim \exp(i(kr - \omega t))/r$ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ eine Lösung der homogenen, eindimensionalen Wellengleichung ist, wenn g, f beliebige, aber zweimal differenzierbare Funktionen sind. Diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von Lösungen der Form $f(x,t) = \exp(-\gamma(x-ct)^2); g \equiv 0; \gamma = \text{const} > 0$. Skizzieren Sie $f(x,t_0)$ für verschiedene Zeiten t_0.

Bitte wenden! →

26. **Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes**
Ziel dieser Aufgabe ist es, für eine gegebene Verteilung von Ladungen ρ und Strömen $\vec{j}$ die Drehimpulserhaltung nachzuweisen und einen Ausdruck für die Drehimpulsdichte $\vec{\mathcal{L}}_{\text{feld}}$ des elektromagnetischen Feldes abzuleiten.

(a) Zeigen Sie, dass sich die zeitliche Ableitung der i-ten Komponente des mechanischen Drehimpulses

$$\frac{d\vec{L}_{\text{mech}}}{dt} = \int_V dV\, \vec{r} \times (\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B})$$

schreiben lässt als:

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\, (\vec{\mathcal{L}}_{\text{mech}} + \vec{\mathcal{L}}_{\text{feld}})_i = \int_V dV\, \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} T_{kl}. \qquad (1)$$

Geben Sie $\vec{\mathcal{L}}_{\text{feld}}$ an. T_{ij} ist der Maxwellsche Spannungstensor.
Hinweis: zeigen Sie, dass gilt

$$[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})]_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{E}\delta_{\alpha\beta}).$$

(b) Um den Fluss der Drehmomentdichte zu bestimmen, muss die rechte Seite von Gleichung (1) als Volumen-Integral über eine Divergenz geschrieben werden. Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil b), um die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\, (\vec{\mathcal{L}}_{\text{mech}} + \vec{\mathcal{L}}_{\text{feld}})_i = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{M}$$

abzuleiten. Was erhalten Sie für $\vec{M}$? Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Hinweise zu Blatt 7:

- In Aufgabe 22a) muss es $\vec{E}||\vec{v}_0$ anstelle von $\vec{v} \parallel \vec{v}_0$ heissen.
- In Aufgabe 22b) muss Spur$(\underline{\underline{C}}) = C^\mu{}_\mu$ stehen.
- Aufgabe: 23a): In der Fouriertrafo bez. $\vec{r}$ verwende man als Normierung $1/\sqrt{2\pi}^3$ anstelle von $1/\sqrt{2\pi}$.
- Ergänzender Hinweis zu Aufgabe 23b): Überlegen Sie sich, für welche Zeiten t das Integral entlang C bzw. C' über ω in der komplexen Ebene existiert.