INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2002

7. Übungsblatt Abgabe: **Donnerstag, den 15.05.02**

21. **Legendre-Polynome II**
Als Anwendung der in Aufgabe 20 eingeführten Legendre-Polynome betrachten wir eine leitende Kugel mit Radius R in einem statischen elektrischen Feld, das in grösserer Entfernung von der Kugel homogen ist. Zum Beispiel könnte so ein Feld von einem Plattenkondensator erzeugt worden sein. Der Koordinatenursprung soll im Mittelpunkt der Kugel liegen.
Es handelt sich um ein zylindersymmetrisches Problem. Die Lösung $\Phi(\vec{r})$ der Laplace-Gleichung ausserhalb der Kugel muss sich daher als

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U_l(r)}{r} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

schreiben lassen (vgl. Aufgabe 20). Das Problem besteht jetzt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l aus den Randbedingungen.

(a) Geben Sie das Potential im Inneren der Kugel an. Aus der Stetigkeit von $\Phi(r,\theta)$ bei $r = R$ erhalten Sie eine erste Bedingung an die Koeffizienten a_l, b_l. Für grosse $|\vec{r}|$ sei $\vec{E} = \vec{E}_\infty = E_0 \vec{e}_z$. Geben Sie das zugehörige Potential $\Phi_\infty(r,\theta)$ an. Eine zweite Bedingung an die Koeffizienten erhalten Sie aus dem asymptotischen Verhalten von $\Phi(r,\theta)$: $\Phi(r,\theta) \to \Phi_\infty(r,\theta)$ für $r \gg R$. Beide Gleichung sind vom Typ:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l\, r_0^l + \frac{b_l}{r_0^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = f(r_0,\theta). \qquad (1)$$

Leiten Sie aus (1) Bestimmungsgleichungen für a_l und b_l für eine beliebige Funktion $f(r_0,\theta)$ ab. Geben Sie das Potential $\Phi(r,\theta)$ für beliebige r an.
Hinweis: verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 20!

(b) Diskutieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien und skizzieren Sie diese.

(c) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ sowie die Gesamtladung Q auf der Kugel. Interpretieren Sie die Terme, die in $\Phi(r,\theta)$ auftreten. Geben Sie das Potential $\Phi_\sigma(r,\theta)$ der Oberflächenladungen für den Fall $Q = 0$ durch Vergleich mit Ihrem Ergebnis für $\Phi(r,\theta)$ für $r > R$ und $r < R$ an.

Bitte wenden! →

22. **Transformation von Feldern**

(a) Im Inertialsystem Σ gelte $\vec{E} = E_0 \vec{e}_2$ und $\vec{B} = \vec{0}$. Was für Felder werden aus einem mit $\vec{v}_0$ relativ zu Σ bewegten Inertialsystem Σ' beobachtet? Diskutieren Sie die Fälle $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$ und $\vec{E} \perp \vec{v}_0$. Geben Sie jeweils die Lorentzkraft aus Sicht eines Beobachters in Σ bzw. Σ' an, die eine Punktladung erfährt, die in Σ am Ort $\vec{r} = \vec{0}$ ruht.

(b) Zeigen Sie: die Spur $\mathrm{Spur}(\underline{\underline{C}}) = C^{\mu}{}_{\mu}$ eines Lorentz-Tensors $\underline{\underline{C}}$ zweiter Stufe ist ein Lorentz-Skalar.

(c) Zeigen Sie, dass die Größen $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ und $(\vec{E} \cdot \vec{B})^2$ Lorentz-Skalare sind.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{Spur}\underline{\underline{F}}^2 = F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}$ bzw. $\det(\underline{\underline{F}})$. $\underline{\underline{F}}$ ist der Feldtensor.

23. **Greensche Funktion des d'Alembert-Operators**
In dieser Aufgabe wollen wir uns eine partikuläre Lösung der Wellengleichung

$$\Box\Phi(\vec{r}, t) = \Delta\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

verschaffen. Gesucht ist die Greensche Funktion, die

$$\Box G(\vec{r}, t) = \Delta G(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\vec{r}, t) = -4\pi\delta(\vec{r}, t)$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}^{\,3}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}G(\vec{r}, t)$$

gilt:

$$G(\vec{k}, \omega) \propto \frac{1}{\omega^2 - k^2c^2}. \tag{2}$$

(b) Führen Sie zuerst die Fourier-Rücktransformation von (2) bezüglich ω aus. Dazu bietet es sich an, ω als komplexe Zahl anzunehmen und den Residuensatz zu verwenden. Die Integrationskontur in der komplexen Ebene schließe die reelle Achse ein und wird entweder durch einen Halbogen in der unteren (Kontur C) oder oberen Halbebene (Kontur C') geschlossen. Die Pole von $G(\vec{k}, \omega)$ liegen auf der reellen Achse. Um Singularitäten zu vermeiden, nehme man in Gleichung (2) die Ersetzung $kc \to kc + i\eta; \eta > 0$ vor. Nach der Integration bilde man den Grenzwert $\eta \to 0$. Skizzieren Sie C, C' und die Pole des Integranden. Integrieren Sie entlang der Kontur C.
Hinweis: Überlegen Sie sich, für welche Zeiten t das Integral entlang C bzw. C' existiert.

(c) Die Rücktransformation bezüglich $\vec{k}$ in den Ortsraum führt man am einfachsten mit Hilfe von sphärischen Polarkoordinaten im $\vec{k}$-Raum aus. Legen Sie die k_z-Achse parallel zu $\vec{r}$.

(d) Interpretieren Sie die Zeitabhängigkeit Ihres Ergebnisses für $G(\vec{r}, t)$. Was erhält man, wenn man entlang C' integriert?