INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2002

6. Übungsblatt Abgabe: **Freitag, den 10.5.2002, bis 14.00 Uhr**

18. **Methode der Bildladung II**

    (a) Zwischen zwei in x_2- und x_3-Richtung unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatten bei $x_1 = d$ und $x_1 = -d$ befindet sich eine Punktladung q am Ort $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$. Bestimmen Sie mit der Methode der Bildladung das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Volumen $V = \{\vec{r}\,|-d \leq x_1 \leq d\}$.

    (b) Das Volumen $V = \{\vec{r}\,|\,x_1 > 0 \wedge x_2 > 0\}$ sei durch geerdete Metallplatten begrenzt. Ermitteln Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ in V, wobei sich am Ort $\vec{r} = (a, a, 0)$ mit $a > 0$ eine Punktladung q befinden möge.

    Zeigen sie in beiden Aufgabenteilen explizit, dass Ihre Wahl der Bildladungen die Randbedingung $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r}\in\partial V} = 0$ erfüllt.

19. **Kapazitäten**

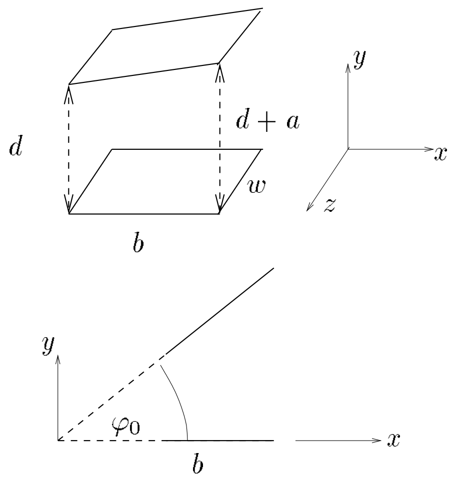
    (a) Bestimmen Sie für den Zylinderkondensator aus Aufgabe 16 die Kapazitätskoeffizienten c_{ij}. Der innere Zylinder trage die Gesamtladung Q_1 und der äußere sei mit Q_2 aufgeladen. Verwenden Sie als Randbedingung $\Phi(|\vec{r}| = R_0) = 0$ mit $R_1 < R_2 < R_0$. Geben Sie die Kapazität an.
    Hinweis: Berechnen Sie zunächst das elektrische Feld und das Potential mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

    (b) Wir betrachten den *nicht-ganz-so-parallelen* Plattenkondensator (siehe Skizze). Zwischen den Platten liege die Spannung U an. Berechnen Sie die Kapazität und vernachlässigen Sie dabei Randeffekte. Gehen Sie wie folgt vor:

    i. Führen Sie Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ein, wobei die z-Achse in der Schnittgeraden der beiden Plattenebenen liege. Begründen Sie, dass das Potential nur von φ abhängt.

    ii. Lösen Sie die Laplace-Gleichung im Volumen zwischen den Platten. Verwenden Sie als Randbedingungen $\Phi(x, y = 0, z) = 0$ und geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ an.

    iii. Berechnen Sie die Ladung Q auf der Kondensatorplatte bei $y = 0$.



Bitte wenden! →

20. **Legendre-Polynome I**

(a) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $\Phi(\vec{r}) = P(\cos\theta)\,Q(\phi)\,U(r)/r$ aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^2\Phi(\vec{r})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r})}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (1)$$

gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $P(\cos\theta), Q(\phi)$ und $U(r)$ ab. Zeigen Sie: $Q(\phi) = \exp(im\phi)$. Warum sind nur die Werte $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ zugelassen?

(b) Wir betrachten im folgenden zylindersymmetrische Lösungen von $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$, d.h., $m = 0$. Für $P(\cos\theta)$ sollten Sie jetzt die DGL

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0; \quad x = \cos\theta \qquad (2)$$

erhalten. λ ist eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l; \quad l \in \mathbb{N} \qquad (3)$$

die DGL (2) lösen. Geben Sie die fünf niedrigsten $P_l(x)$ an.
Hinweis: Differenzieren Sie $(l+1)$-mal die Gleichung

$$(x^2-1)\frac{d(x^2-1)^l}{dx} = 2lx(x^2-1)^l.$$

(c) Zeigen Sie, dass die P_l orthogonale Funktionen auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$ sind; d.h., dass gilt:

$$\langle P_l | P_{l'} \rangle := \int_{-1}^{1} dx P_l(x) P_{l'}(x) = \text{const}\ \delta_{ll'}.$$

Hinweis: Zeigen Sie mittels partieller Integration

$$\langle P_l | D P_{l'} \rangle = \langle D P_l | P_{l'} \rangle \text{ mit } DP_l(x) = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right)P_l(x) \qquad (4)$$

und verwenden Sie Gleichung (2), um $\langle P_l | D\,P_{l'} \rangle = -l(l+1)\langle P_{l'} | P_l \rangle$ herzuleiten.
Bemerkung: in Gleichung (4) wird ein *Skalarprodukt* $\langle . | . \rangle$ auf dem Raum der stetigen Funktionen $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ definiert.

(d) Für $l = l'$ gilt (ohne Beweis!): $\langle P_l | P_l \rangle = \frac{2}{2l+1}$. Verifizieren Sie diese Gleichung für $l = 0, 1, 2, 3$.

(e) Zeigen Sie, dass $U(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$ die allgemeine Lösung der Radialgleichung (also der DGL für $U(r)$) ist.

(f) Die Legendre-Polyome $\{\tilde{P}_l(x) := \sqrt{(2l+1)/2}\,P_l(x);\ l \in \mathbb{N}\}$ bilden einen *vollständigen* Satz *orthonormierter* Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$. Das bedeutet, dass sich Funktionen[1] $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l$ darstellen lässen:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \tilde{P}_l(x).$$

Stellen sie $f(x) = x^3$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l(x)$ dar.
Hinweis: Ansatz $x^3 = \sum_{l=0}^{3} P_l(x)$; Koeffizientenvergleich!.

[1] Für eine genaue Diskussion der Forderungen an f verweisen wir auf die Mathematik :-).