INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

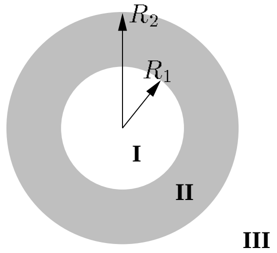
KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2002

5. Übungsblatt — Abgabe: **2.5.2002**

Termine: Für die Gruppen 2 und 3 findet am **Dienstag, den 30.4.02**, von 13:15-14:45 Uhr im Raum MS 3.3 eine gemeinsame Übung statt, in der Blatt 4 zurückgegeben und besprochen wird.
Hinweis: Bitte verwenden Sie bei der Lösung der Aufgaben ausschließlich *cgs*-Einheiten!

15. **Kugelsymmetrische Ladungsverteilung**
Das Grundproblem der Elektrostatik ist das Lösen der Poissongleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$ unter gegebenen Randbedingungen. Als Beispiel betrachten wir die folgende Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$; $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & |\vec{r}| < R_1 \\ \rho_0 = \text{const} \quad \text{für} & R_1 \leq |\vec{r}| \leq R_2 \\ 0 & R_2 < |\vec{r}| \end{cases}$$



und die Dirichlet-Randbedingungen

$$\lim_{|\vec{r}|\to\infty} \Phi(\vec{r}) = 0\,; \quad \Phi(\vec{r})|_{|\vec{r}|=R_1} = \frac{C_1}{R_1}; \quad \Phi(\vec{r})|_{|\vec{r}|=R_2} = \frac{C_2}{R_2}.$$

Außerdem soll das Potential stetig bei $|\vec{r}| = R_1$ bzw. $|\vec{r}| = R_2$ sein.

(a) Begründen Sie, dass in diesem Beispiel das Potential nur eine Funktion von $r = |\vec{r}|$ ist. Zeigen Sie, dass sich die Poissongleichung auf eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung reduziert und lösen Sie diese allgemein. Geben Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\vec{E}$ in den Bereichen I, II und III an.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Poissongleichung in sphärischen Polarkoordinaten.

(b) Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Lösungsformel für die Poissongleichung

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}\,'^3\, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}; \quad \text{für} \quad \rho(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \notin V.$$

um das Potential $\Phi(\vec{r})$ in den Raumbereichen I,II und III anzugeben.

(c) Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus, um das elektrische Feld $\vec{E}$ direkt mit Hilfe des Gaußschen Satzes in den Raumbereichen I,II und III zu berechnen.

(d) Skizzieren Sie Φ und $\vec{E}$ als Funktion von $|\vec{r}|$ für $R_1 = 0$.

Bitte wenden! →

16. **Zylinderkondensator**
Zwei metallische Zylindermäntel der Länge L mit den Radien R_1 und R_2 sind so in einander geschoben, dass die Querschnitte senkrecht zur Zylinderachse konzentrische Kreise sind (siehe Skizze zu Aufgabe 15). Der innere Mantel trage die konstante Flächenladungsdichte σ_1; der äussere sei mit σ_2 aufgeladen. Vernachlässigen Sie Randeffekte, d.h. $R_1, R_2 \ll L$.

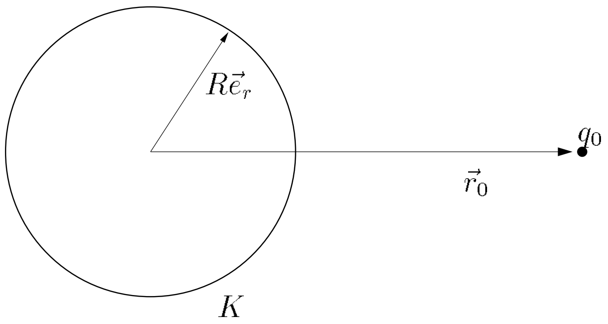
   (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in den Raumbereichen I,II und III. Ist $\vec{E}(\vec{r})$ stetig bei $|\vec{r}| = R_1$ bzw. $|\vec{r}| = R_2$? Begründen Sie Ihre Beobachtung!

   (b) Geben sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ in den Bereichen I,II und III an. Welchen Wert hat $\Phi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| = \infty, R_2, R_1$? Ist Φ stetig?

   (c) Wie müssen σ_1 und σ_2 gewählt werden, damit das elektrische Feld im Aussenraum III verschwindet? Geben Sie für diesen Fall die Kapazität $C = Q/U$ an.

17. **Methode der Bildladung**

Gegeben sei eine geerdete, metallische Kugel K mit Radius R. Bringt man eine Punktladung q_0 an den Ort $\vec{r}_0$ (siehe Skizze) in die Nähe der Kugel, entsteht auf der Kugeloberfläche eine Influenzladung.



   (a) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Außenraum der Kugel mit Hilfe der Methode der Bildladung unter der Randbedingung $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r}\in\partial K} = 0$

   (b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel? Begründen Sie, unter welchem Winkel das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel einmündet. Verwenden Sie den Gaußschen Satz, um eine Bestimmungsgleichung für die Influenzladung $\sigma_0(\vec{r})$ aufzustellen. Geben Sie $\sigma_0(\vec{r})$ an. Welches sind die Linien $\sigma(\vec{r}) = \text{const}$ auf der Kugeloberfläche? Skizzieren Sie $\sigma_0(\vec{r})$ in geeigneter Weise.

   (c) Bestimmen Sie die influenzierte Gesamtladung durch Integration über die Kugeloberfläche und vergleichen Sie mit der Stärke der Bildladung.

   (d) Berechnen Sie die von der influenzierten Ladung ausgeübte Kraft auf die Punktladung q_0 als Funktion von $r_0 = |\vec{r}_0|$. Was ergibt sich für $r_0 \gg R$?

Hinweis: Nutzen Sie bei der Berechnung der auftretenden Integrale die Symmetrie des Problems aus. In Teil (d) könnte Ihnen eine geeignete Substitution und eine Partialbruchzerlegung helfen.