INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. F. Heidrich-Meisner

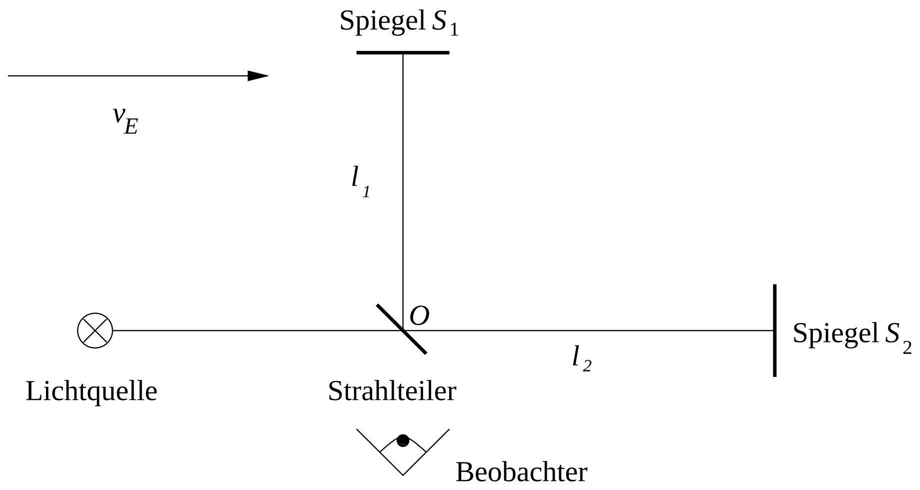
KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2002

3. Übungsblatt — Abgabe: **Präsenzübung, keine Abgabe**

8. **Michelson-Morley Experiment**
Ursprünglich nahm man an, dass sich das Licht (analog zur Schallausbreitung) in einem besonderen Medium, dem *Äther*, ausbreitet. Die Lichtgeschwindigkeit c, die ein relativ zum Äther bewegter Beobachter mißt, müßte dann von seiner Bewegungsrichtung abhängen.
Im Michelson-Morley-Experiment (siehe Skizze) wird ausgenutzt, dass die Bahngeschwindigkeit v_E der Erde annähernd konstant ist. Wir nehmen im folgenden an, dass die Erde sich mit v_E relativ zum Äther bewegt.

   (a) Welchen Gangunterschied s haben zwei Lichtstrahlen, von denen einer den Weg OS_1O und der andere die Strecke OS_2O zurückgelgt hat? Verwenden Sie die Galilei-Transformation. Entwickeln Sie Ihr Ergebnis für s bis zur Ordnung $(v_E/c)^2$.

   (b) Wenn man das Interferometer um 90° dreht, ändert sich der Gangunterschied und das Interferenzmuster bei O verschiebt sich um Δn Interferenzstreifen. Berechnen Sie Δn. Verwenden Sie als Zahlenbeispiel: $v_E/c = 10^{-4}, l_1 = l_2 = 25\text{m}, \lambda = 5 \cdot 10^{-5}\text{cm}$. Vergleichen Sie mit dem experimentellen Wert von $\Delta n \approx 10^{-3}$.



9. **Diracsche δ-Funktion**
Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0). \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$d_l(x) := \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

normiert sind (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l[f] := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, d_l(x - x_0) f(x),$$

wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Verfahren Sie analog zu Teil (a) mit den Funktionen

$$g_l(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, l} \exp(-x^2/(2l^2)).$$

(c) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}[f] := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\vec{r}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3); \quad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Berechnen Sie:

i. $\int dV\, \vec{r} \rho(\vec{r})$ mit $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$; $V = \mathcal{R}^3$.
ii. $\int dV\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta(\vec{r}) = 1$; $V = \mathcal{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).

10. **Coulomb-Potential**
Das bekannte Coulomb-Potential lautet:

$$\Phi = \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad \text{mit} \quad |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

(a) Stellen Sie die Taylorreihe von $\Phi(\vec{r})$ um den Punkt $\vec{r} = \vec{r}_0 \neq \vec{0}$ bis zur zweiten Ordnung auf.

(b) Geben Sie das Feld $\vec{E}$ an.

(c) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotentialflächen.

(d) Ermitteln Sie $\Delta\Phi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| > 0$ und verifizieren Sie den Gaußschen Satz

$$\int_K d\vec{r}^{\,3} \operatorname{div} \vec{E} = \oint_{\partial K} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

für das Vektorfeld $\vec{E}$ und die Gebiete $K = \{\vec{r}\,|\,0 < \epsilon < |\vec{r}| \leq R\}$ bzw. $K = \{\vec{r}\,|\,|\vec{r}| \leq R\}$. Geben Sie $\Delta\Phi(\vec{r})$ bzw. $\operatorname{div} \vec{E}$ für beliebige $\vec{r}$ an.