INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

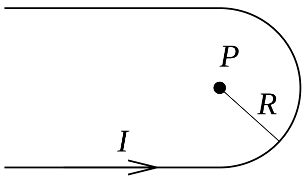
Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SS 1999

11. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 15.7.99, bis 11.25 Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, Raum A317, Dienstag, 10.00–11.30 Uhr., Tel:: 391-5187

33. Bestimmen Sie für den in der Skizze abgebildeten Draht (der nach links unendlich weiterläuft) das Magnetfeld im Punkt P, wenn im Draht der Strom I fließt.



34. Ein Kreisstrom mit Stromstärke I erzeugt im Fernfeld ein magnetisches Dipolfeld, wobei der Betrag des magnetischen Dipolmoments durch

$$m = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \pi r^2$$

gegeben ist (r ist der Radius der kreisförmigen Stromschleife).

Man betrachte nun eine Kugel, mit der Ladungsdichte $\varrho_e(r)$ und der Massendichte $\varrho_m(r)$, die die Gesamtladung q trägt und die Gesamtmasse m hat. Die Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Man berechne das Verhältnis M/L des magnetischen Dipolmoments der Kugel zum Drehimpuls.

35. **Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten**. Es soll gezeigt werden, daß für das Potential einer Ladungsverteilung $\varrho(\underline{x})$ in Kugelkoordinaten für das Fernfeld die Multipolentwicklung

$$\Phi_l(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{m=-l}^{l} \frac{M_{l,m}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \qquad \Phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l(r,\vartheta,\varphi) \quad , \qquad (1)$$

mit

$$M_{l,m} = \frac{4\pi}{2l+1} \int r'^{l} Y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi') \varrho(\underline{x}')\, dV' \quad \text{mit } r' = |\underline{x}'|$$

gilt. $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ sind die sogenannten Kugelfunktionen, deren Definition in der gängigen Literatur zu finden ist.

(a) Zeigen Sie zunächst, daß die Ausdrücke Φ_0 und Φ_1 denen in der Vorlesung abgeleiteten Ausdrücken der Multipolentwicklung entsprechen (wer Lust hat, kann es auch für das Quadrupolmoment zeigen, was aber etwas länglich wird).

(b) Zeigen Sie für die ersten drei Glieder der folgenden Summe, daß im Fernfeld $(r' < r)$

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\gamma)$$

gilt, wobei γ der Winkel zwischen $\underline{x}$ und $\underline{x}'$ ist, $r = |\underline{x}|$ und $r' = |\underline{x}'|$. $P_l(x)$ sind die Legendreschen Polynome (s. Literatur). Wer noch viele Sonderpunkte braucht, kann dies auch ganz allgemein für alle Summanden der Reihe zeigen.

(c) Mittels der Beziehung

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y^*_{l,m}(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

soll nun die Gleichung (1) abgeleitet werden.