INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SS 1999

4. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 20.5.99, bis 11.25 Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, Raum A317, Dienstag, 10.00–11.30 Uhr., Tel:: 391-5187

12. Der Dielektrizitätstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$ eines anisotropen Kristalls sei gegeben durch

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei α eine beliebige Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $\underline{\underline{S}}$, so daß

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{S}}$$

diagonal wird ($\underline{\underline{S}}^T$ ist die transponierte Matrix). Zeigen Sie, daß $\underline{\underline{S}}$ eine Drehmatrix darstellt.

(b) Zeigen Sie: Die Flächen konstanter elektrischer Feldenergie (in Abwesenheit von Magnetfeldern) sind Ellipsoide im $\underline{E}$-Raum (sog. FRESNEL- oder Strahlenellipsoide) und bestimmen Sie die Längen der Halbachsen.

(c) Zeigen Sie: Der Vektor der dielektrischen Verschiebung $\underline{D}$ zu einem gegebenen Vektor $\underline{E}$ steht senkrecht auf der zugehörigen Ellipsoidenfläche (geometrische Interpretation der Materialgleichung $\underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E}$).

(d) Eine analoge Betrachtung gilt auch im $\underline{D}$-Raum. Der zum inversen Dielektrizitätstensor gehörige Ellipsoid heißt dann Index- oder Normalenellipsoid. Bestimmen Sie dessen Halbachsen.

13. (a) Rechnen Sie nach, daß die in der Vorlesung angegebene nicht-lokale Beziehung

$$\underline{D}(\underline{x}, t) = \varepsilon_0 \iiint dV' \int_0^\infty dt'\, \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}', t')\underline{E}(\underline{x} - \underline{x}', t - t')$$

für die Fouriertransformierten auf die Beziehung

$$\underline{D}(\underline{k}, \omega) = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{k}, \omega) \cdot \underline{E}(\underline{k}, \omega)$$

führt.

(b) Welche Form muß $\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}, t)$ haben, damit auch in Raum und Zeit ein lokaler und instantaner Zusammenhang zwischen $\underline{D}$ und $\underline{E}$ besteht? Was bedeutet diese Form von $\underline{\underline{\varepsilon}}$ anschaulich? Wie sieht es dann mit der Wellenlängen- bzw. Frequenzabhängigkeit von $\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{k}, \omega)$ aus?