INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

KLASSISCHE FELDTHEORIE SS 1999

3. Übungsblatt Abgabe: Dienstag, 11.5.99, bis 11.25 Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, Raum A317, Dienstag, 10.00–11.30 Uhr., Tel:: 391-5187

9. Wie man aus Aufgabe 8 gelernt hat, verursachen nicht orthogonale Koordinatensysteme einige Probleme. Will man ein Problem in elliptischen Koordinaten beschreiben, so gibt es jedoch auch eine Möglichkeit, orthogonale elliptische Koordinaten einzuführen. Im Spezialfall von Rotationssymmetrie bzgl. der z-Achse haben diese die Form:

$$\begin{aligned} x &= a \sinh u \sin\vartheta \cos\varphi \qquad & 0 \leq &\varphi \leq 2\pi \\ y &= a \sinh u \sin\vartheta \sin\varphi \qquad & 0 \leq &\vartheta \leq \pi \\ z &= a \cosh u \cos\vartheta \qquad & 0 \leq &u \leq \infty \end{aligned}$$

   (a) Zeichnen Sie für ein festes φ die Koordinatenlinien $u = const.$ und $\vartheta = const.$

   (b) Bestimmen Sie den Laplace-Operator Δ in diesen Koordinaten (**Hinweis:** Die LAMÉschen Koeffizienten h_i sind die Längen der Basisvektoren $\underline{a}^{(i)}$).

10. Gegeben sei das Vektorpotential

$$\underline{A}' = (xy, -z, zx) \quad .$$

   (a) Bestimmen Sie ein Vektorpotential $\underline{A}$, daß die Coulombeichbedingung erfüllt und für das $\operatorname{rot} \underline{A} = \operatorname{rot} \underline{A}'$ gilt.

   (b) In der VL wurde angegben, daß zur Erfüllung der Coulombeichbedingung immer ein $\chi(\underline{x})$ gefunden werden kann, dessen Gradient zu $\underline{A}'$ hinzuaddiert wird (Gl. (I.121) im Skript). Versuchen Sie, eine explizite Formel für $\chi(\underline{x})$ für beliebiges $\underline{A}'$ zu finden. Welche Bedingungen muß $\underline{A}'$ erfüllen, damit dies möglich ist?

11. Bestimmen Sie das wirbelfreie Vektorfeld $\underline{E}$ und dessen Potential Φ für eine kugelförmige, homogene Quellendichte $\varrho(r)$:

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 = const. & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} \quad .$$

   r sei der Abstand vom Ursprung (Kugelkoordinaten!). Verwenden Sie dazu die in der VL angegebene Lösungsformel für die Poisson-Gleichung. Φ und $\underline{E}$ sollen sowohl innerhalb als auch außerhalb der ϱ-Kugel bestimmt werden, also im gesamten Raum. Interpretieren Sie das Ergebnis für Φ im Fall $r > R$. Skizzieren Sie den Verlauf von Φ und $\underline{E}$ (eindimensional).