INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

KLASSISCHE FELDTHEORIE SS 1999

2. Übungsblatt Abgabe: Donnerstag, 6. 5. 99, bis 11.25 Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, Raum A317, Dienstag, 10.00–11.30 Uhr., Tel:: 391-5187

5. (a) Beweisen Sie die Formel $\nabla\times\nabla\times\underline{A} = \nabla(\nabla\cdot\underline{A}) - \Delta\underline{A}$ durch komponentenweises Ausrechnen in kartesischen Koordinaten.

   (b) Zeigen Sie: Jedes Vektorfeld $\underline{A}$, daß die Gleichung $\nabla\times\nabla\times\underline{A} - k^2\underline{A} = 0$ erfüllt, ist zugleich Lösung der sogenannten HELMHOLTZ-Gleichung $\nabla^2\underline{A} + k^2\underline{A} = 0$.

6. Für stationäre elektrische Felder besteht zwischen der Stromdichte $\underline{j}$ und dem Magnetfeld $\underline{B}$ der Zusammenhang rot$\underline{B} = \underline{j}$. Berechnen und skizzieren Sie den Feldverlauf von sogenannten „stromparallelen Magnetfeldern“, für die $\underline{j} = \alpha\underline{B}$ gilt, wobei angenommen werden soll, daß die Felder aus Symmetriegründen nur von z abhängen, also $\underline{B} = \underline{B}(z)$. Als Randbedinungen seien $B_x(z=0) = A^2$ und $B_y(z=0) = 0$ vorgegeben.

7. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der POISSON-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ für ein Potential $\Phi = \Phi(r)$, daß nur vom Abstand r zum Koordinatenursprung abhängt.

   (b) Bestimmen Sie das Potential Φ und den zugehörigen Feldverlauf (Skizze!) für den Innenraum zweier Kugelschalen mit den Radien $r_1 < r_2$, wobei das Potential auf der inneren Kugelschale Φ_1 und auf der äußeren Φ_2 sei.

8. **Skalarprodukt in nicht-orthogonalen krummlinigen Koordinaten**

   Wir betrachten zwei Vektorfelder $\underline{A}(x_1, x_2, x_3)$ und $\underline{B}(x_1, x_2, x_3)$, die in kartesischen Koordinaten beschrieben werden. Wir greifen willkürlich den Punkt $P(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ heraus. Dort mögen die Vektorfelder gerade die Werte $\underline{a}$ und $\underline{b}$ annehmen:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3 = \underline{A}\left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right) \\ \text{und}\quad \underline{b} &= b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + b_3\underline{e}_3 = \underline{B}\left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right) \quad . \end{aligned}$$

   Um nachher mit Zahlen rechnen zu können, nehmen wir mal für die Koordinatentupel $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0)$ und $(b_1, b_2, b_3) = (-1, 2, 0)$ an. Das Skalarprodukt in kartesischen Koordinaten ergibt sich offensichtlich zu $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = -1 + 2 + 0 = 1$. Diese Größe sollte natürlich unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein.

   (a) Es sollen ebene „quasi-elliptische“ Koordinaten gemäß der Transformation

$$x_1 = a\xi_1\cos\xi_2 \quad , \quad x_2 = b\xi_1\sin\xi_2 \quad \text{und} \quad x_3 = \xi_3$$

   benutzt werden, wobei $a = 2$ und $b = 1$ seien. Zeichnen Sie die Koordinatenlinien $\xi_1 = const.$ und $\xi_2 = const.$ und tragen Sie die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ein (in der $\xi_3 = 0$-Ebene).

(b) Bestimmen Sie die Einheitsbasisvektoren $\underline{\tilde{e}}_i$ in diesem System aus denen in der Vorlesung angegebenen Vektoren $\underline{a}^{(i)}$ durch Normierung. Zeigen Sie, daß das benutzte Koordinatensystem nicht orthogonal ist.

(c) Jetzt sollen die Komponenten der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ in dem neuen Koordinatensystem bestimmt werden. Wir bezeichnen diese aus Gründen, die später klar gemacht werden mit oben stehenden Indizes:

$$\underline{a} = \tilde{a}^1 \underline{\tilde{e}}_1 + \tilde{a}^2 \underline{\tilde{e}}_2 + \tilde{a}^3 \underline{\tilde{e}}_3 \tag{1}$$

(und analog für $\underline{b}$). Dazu bestimme man die sogenannte „duale Basis“, die durch

$$\underline{\tilde{e}}^1 = \frac{\underline{\tilde{e}}_2 \times \underline{\tilde{e}}_3}{\underline{\tilde{e}}_1 \cdot (\underline{\tilde{e}}_2 \times \underline{\tilde{e}}_3)}$$

definiert ist (die übrigen zwei Basisvektoren erhält man durch zyklisches Vertauschen der Indizes). Zeigen Sie, daß für die duale Basis allgemein die Beziehung $\underline{\tilde{e}}^i \underline{\tilde{e}}_j = \delta_{ij}$ gilt, und daß sich die Koordinaten $\tilde{a}^i$ eines Vektors aus $\tilde{a}^i = \underline{\tilde{e}}^i \cdot \underline{a}$ bestimmen lassen. Bestimmen Sie dann die $\tilde{a}^i$s bzw. $\tilde{b}^i$s. Beachten Sie dabei, daß die Basisvektoren selber von den ξ_i abhängen! Tragen Sie in die Skizze die zu $\underline{a}$ und $\underline{b}$ gehörenden Basisvektoren $\underline{\tilde{e}}_i$ ein und bestimmen Sie die Komponenten auch zeichnerisch!

(d) Berechnen Sie nun die Größe $\tilde{a}^1\tilde{b}^1 + \tilde{a}^2\tilde{b}^2 + \tilde{a}^3\tilde{b}^3$. Dies sollte eigentlich 1 ergeben (das Skalarprodukt), was aber nicht der Fall ist. Richtig geht es, wenn man nicht die Komponenten sondern die Vektoren in der Form (1) miteinander multipliziert (also unter Berücksichtigung der Basisvektoren). Führen Sie dies aus (jetzt sollte 1 rauskommen).

(e) Eleganter geht das, indem man $\underline{a}$ und $\underline{b}$ in der dualen Basis ausdrückt:

$$\underline{a} = \tilde{a}_1 \underline{\tilde{e}}^1 + \tilde{a}_2 \underline{\tilde{e}}^2 + \tilde{a}_3 \underline{\tilde{e}}^3$$

Bestimmen Sie die $\tilde{a}_i$ und $\tilde{b}_i$ (Man beachte: Die Komponenten mit den tiefgestellten Indizes sind nicht gleich denen mit den hochgestellten Indizes).

(f) Berechnen Sie nun

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \tilde{a}^1\tilde{b}_1 + \tilde{a}^2\tilde{b}_2 + \tilde{a}^3\tilde{b}_3 = \tilde{a}_1\tilde{b}^1 + \tilde{a}_2\tilde{b}^2 + \tilde{a}_3\tilde{b}^3 \quad . \tag{2}$$

Es sollte nun wieder 1 rauskommen (beide Ausrechenmöglichkeiten der obigen Gleichungen prüfen!). Diese Formel ist analog zu der eingangs gegebenen für kartesische Koordinaten.

Die Moral von der Geschichte: Die $\tilde{a}^i$ heißen auch *kontravariante* Komponenten und die $\tilde{a}_i$ *kovariante* Komponenten des Vektors $\underline{a}$ in einer gegebenen Basis. Das Skalarprodukt ist eine *invariante* Größe. Invariante Grössen setzen sich nun immer aus dem Produkt von ko- und kontravarianten Grössen zusammen (wie in (2)). Dies ist ein ganz allgemeines Prinzip. Daß man das Skalarprodukt in kartesischen (bzw. auch in orthogonalen) Koordinaten so einfach nach $\Sigma a_i b_i$ ausrechnen kann, ist reiner Zufall, da in orthogonalen Koordinaten die kovarianten Komponenten gleich den kontravarianten Komponenten sind (Prüfen Sie das ruhig mal nach). Allgemein muß man es immer so machen, wie in Teil (f).