INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2013

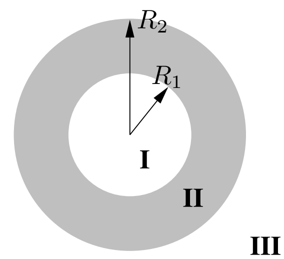
5. Übungsblatt Abgabe: Mo., 29.04.2013 bis 17 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

9. **Kugelsymmetrische Quellen** **(17 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\underline{x})$ mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ das Potential $\Phi(\underline{x})$ und das elektische Feld $\underline{E}(\underline{x})$ auf verschiedenen Lösungswegen bestimmt werden. Dazu betrachten wir die Ladungsdichte

$$\rho(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \rho_0 \, r \quad \text{für} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases} \qquad r := |\underline{x}| \quad (1)$$



(a) Lösen Sie die *Poisson-Gleichung* $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi(\underline{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{x})$ durch direktes Integrieren in den verschiedenen Raumbereichen I – III. Sie dürfen dabei gegebenenfalls auch auf Ergebnisse aus Aufgabe 7 zurückgreifen. Eliminieren Sie dabei einige der auftretenden Konstanten durch die physikalischen Randbedingungen $|\Phi(\underline{x})| < \infty$ für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$; $\Phi(r \to \infty) = 0$ sowie die Forderung, dass $\Phi(\underline{x})$ überall stetig sein soll.

(b) Verwenden Sie nun das *Poisson-Integral*

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3\underline{x}' \, \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \qquad (2)$$

um das Potential $\Phi(\underline{x})$ zu bestimmen. Benutzen Sie die Gesamtladung Q um ihr Ergebnis in Bereich III zu vereinfachen.

(c) Erläutern Sie ausgehend von ihren Ergebnissen von (a) und (b), warum Sie das elektrische Feld schreiben können als

$$\underline{E}(\underline{x}) = E(r) \, \underline{e}_r \quad . \qquad (3)$$

Verwenden Sie diesen Ansatz um das elektrische Feld $\underline{E}(\underline{x})$ direkt mit Hilfe des Gaußschen Satzes in den Raumbereichen I,II und III zu berechnen.

(d) Zeigen Sie, dass ihre Lösungen der Aufgabenteile (a), (b) und (c) übereinstimmen. Erläutern Sie allgemein, unter welchen Bedingungen welcher Lösungsweg der geeigneteste ist.

Bitte wenden ⟶

(e) Betrachten Sie die beiden Spezialfälle

   i. Vollkugel, d.h. $R_1 \to 0$; $R_2 = R$;

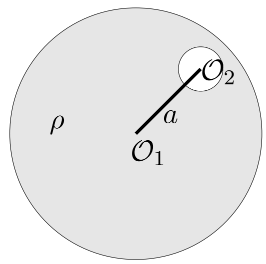
   ii. Hohlkugel, d.h. $R_1 \to R_2$, $R_2 = R$

   und skizzieren Sie $\Phi(\underline{x})$ und $\underline{E}(\underline{x})$ als Funktion von $|\underline{x}|$.

(f) Begründen Sie, dass die hier durchgeführte Rechnung auch für das von einer Massendichte $\rho_m(\underline{x})$ hervorgerufene Gravitationsfeld gilt.

10. **Homogene Kugel mit Loch** **(3 Punkte)**

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2, sein Mittelpunkt $\mathcal{O}_2$ befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt $\mathcal{O}_1$ der großen Kugel.



(a) Nutzen Sie einen der drei Lösungsweg von Aufgabe 9 um das elektrische Feld $\underline{E}(\underline{x})$ im Inneren einer homogen geladenen Vollkugel zu bestimmen.

(b) Verwenden Sie nun geschickt das Superpositionsprinzip um die Kugel mit dem Hohlraum zu modellieren und geben Sie das elektrische Feld $\underline{E}(\underline{x})$ in einem beliebigen Punkt $\underline{x}$ im Inneren des Hohlraums an.