INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

Elektrodynamik SS 2013

9. Übungsblatt Abgabe: Mo., 3. Juni 2013 bis 17 Uhr im Kasten vor A317

**Fragen zu den Aufgaben:** H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

16. **Fresnelsche Formeln** **(20 Punkte)**

Eine ebene elektromagnetische Welle

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \quad ; \quad \underline{B} = \frac{1}{\omega}\, \underline{k} \times \underline{E}$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 \neq 1$ und $\epsilon_2 \neq 1$ sowie den Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\underline{e}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$ bei $x_3 = 0$ erfüllen?

(b) Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\underline{E}^{R,T} = \underline{E}_0^{R,T} \, e^{i(\underline{k}^{R,T}\cdot\underline{r}-\omega^{R,T} t)} \quad .$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^R = \omega^T && (1)\\ |\underline{k}^R| &= |\underline{k}| \quad ; \qquad |\underline{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}|\underline{k}| && (2)\\ k_2 &= k_2^T = k_2^R = 0 \quad ; \qquad k_1 = k_1^T = k_1^R \quad . && (3)\end{aligned}$$

Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz ($k_3^R = -k_3$) und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(c) Folgern Sie aus den Maxwellschen Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\mathrm{TE-Welle:} \quad \{E_2, B_1, B_3\} \qquad ; \qquad \mathrm{TM-Welle:} \quad \{B_2, E_1, E_3\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

(d) Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so um, dass sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\underline{E}_0^R$ und $\underline{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TM-Welle die Verhältnisse $t = |\underline{E}_0^T|/|\underline{E}_0|$ und $r = |\underline{E}_0^R|/|\underline{E}_0|$ und stellen Sie diese als Funktion von $\alpha$ (Einfallswinkel) und von $\epsilon_1$ bzw. $\epsilon_2$ dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 4$ und $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1.5$. Diskutieren Sie den Verlauf.

Bitte wenden ⟶

(e) In Teilaufgabe (c) sollte sich für die reflektierte Welle

$$\frac{E_0^R}{E_0} = \frac{\epsilon_2 \cos\alpha - \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2\alpha}}{\epsilon_2 \cos\alpha + \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2\alpha}} \tag{4}$$

ergeben, wobei $\alpha$ den Einfallswinkel der Welle bezeichnet. Bestimmen Sie aus dieser Beziehung den *Brewster-Winkel* $\alpha_B$. Das ist derjenige Einfallswinkel, bei dem die reflektierte Welle verschwindet.

(f) Nehmen Sie an, eine beliebig polarisierte Welle falle unter dem Brewster-Winkel $\alpha_B$ auf die Grenzfläche ein. Welche Polarisation beobachtet man dann im reflektierten Strahl und in welche Richtung zeigt $\underline{E}^R$?

(g) Betrachten Sie den Fall, dass das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel $\alpha_{total}$, ab dem Totalreflexion eintritt. Zeigen Sie, dass $k_z^T$ für $\alpha > \alpha_{total}$ imaginär wird und dass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung $\delta^R, \delta^T$ bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie $\delta^R$ und $\delta^T$ als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}^T(\underline{r}, t)$ und $\underline{B}^T(\underline{r}, t)$ für $\alpha > \alpha_{total}$ an. Berechnen Sie im Bereich der Totalreflexion den Poynting-Vektor $\underline{\Pi}^T$ im Medium 2 sowie den zeitlichen Mittelwert von $\Pi_z^T$.
*Hinweis:* bei der Mittelwertbildung können Sie sich auf die Stelle $x_1 = 0$ beschränken.