INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2013

7. Übungsblatt Abgabe: Mo., 27. Mai 2012 bis 17 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

15. **Dipolstrahlung** **(20 Punkte)**

In der Vorlesung (Kapitel II, Abschnitt 10) wurde die Reihenentwicklung des retardierten Vektorpotentials

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \tag{1}$$

für große Entfernungen r von einer inselartigen Quellverteilung $\rho(\underline{r}',t), \underline{j}(\underline{r}',t)$ diskutiert. Im folgenden betrachten wir lediglich den ersten Summanden dieser Entwicklung, wobei wir uns auf das Vakuum ($\mu=\epsilon=1$) beschränken:

$$\underline{A}_1(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \quad \text{mit} \quad \underline{p}(t) = \int \mathrm{d}^3r'\,\underline{r}'\rho(\underline{r}',t) \quad . \tag{2}$$

Dieser Term soll nun für den Spezialfall einer zeitlich oszillierenden Ladungs- und Stromverteilung

$$\rho(\underline{r},t) = \rho(\underline{r})\exp(-i\omega t) \quad \text{bzw.} \quad \underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r})\exp(-i\omega t) \tag{3}$$

explizit ausgewertet und diskutiert werden. Dies führt zur sog. *Dipolstrahlung*.

(a) Zeigen Sie, dass die Auswertung von Gl. (2) auf die Form

$$\underline{A}_1(\underline{r},t) = \underline{A}_1(\underline{r})\exp(-i\omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}_1(\underline{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\,\underline{\mathcal{P}}\,\frac{\exp(ikr)}{r} \tag{4}$$

und dem zeitunabhängigen Dipolmoment

$$\underline{\mathcal{P}} = \int \mathrm{d}^3r'\,\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') \tag{5}$$

führt. Die Wellenzahl $k=2\pi/\lambda$ ist wiederum durch $\omega = ck$ festgelegt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gl. (4) das magnetische Feld und ermitteln Sie damit aus dem Gesetz von Ampère das elektrische Feld $\underline{E}_1(\underline{r},t) = \underline{E}_1(\underline{r})\exp(-i\omega t)$. Für große Entfernungen von der Quellverteilung sollte sich näherungsweise

$$\underline{B}_1(\underline{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}ck^2\frac{\exp(ikr)}{r}\underline{e}_r\times\underline{\mathcal{P}} \quad \text{sowie} \quad \underline{E}_1(\underline{r}) \approx c\underline{B}_1(\underline{r})\times\underline{e}_r \tag{6}$$

ergeben. Diskutieren Sie den Feldverlauf von $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$. Gehen Sie insbesondere auf die Abnahme der Feldstärke für große r ein.

Bitte wenden ⟶

(c) Bestimmen Sie den zeitlichen Mittelwert des zu $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$ gehörenden Poynting-Vektors $\underline{\Pi}_1$. Machen Sie sich dafür zunächst klar, dass dieser Mittelwert in der Form

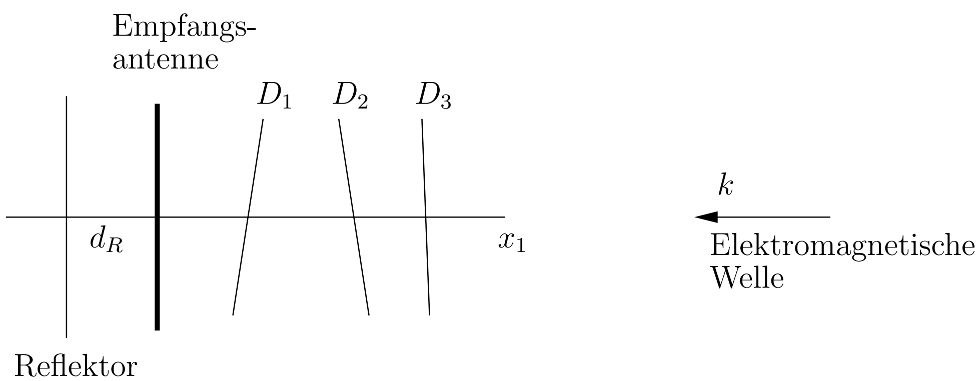
$$< \underline{\Pi}_1 >= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}\{\underline{E}_1^\star(\underline{r}) \times \underline{B}_1(\underline{r})\} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}\{\underline{E}_1(\underline{r}) \times \underline{B}_1^\star(\underline{r})\} \tag{7}$$

geschrieben werden kann. Der Stern bezeichnet die komplexe Konjugation. Diskutieren Sie die Abhängigkeit des Betrages $|< \underline{\Pi}_1 >|$ vom Winkel zwischen $\underline{e}_r$ und $\underline{\mathcal{P}}$ (Skizze!).

(d) Als einfaches Beispiel für einen elektrischen Dipolstrahler bzw. Empfänger soll nun eine Linearantenne betrachtet werden. Die Antenne sei parallel zur z-Achse angeordnet und erstrecke sich von $z = -L/2$ bis $z = +L/2$. Der Durchmesser sein vernachlässigbar klein. Nehmen Sie an, dass bei $z = 0$ ein Strom I_0 eingespeist wird, der zu beiden Enden der Antenne linear auf Null abfällt und berechnen Sie $\underline{\mathcal{P}}$.

Bemerkung: Ausgehend von $\underline{A}_1(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}', t-(r-\underline{e}_r \underline{r}')/c)}{r} dV'$ lässt sich zeigen, dass die Antenne eine Länge von $L \approx \lambda/2$ haben muss, um gut durch einen Dipol beschrieben zu werden.

(e) *Yagi-Antennen:* Fernseh-Empfangsantennen bestehen meist aus mehreren Metallstäben, die auf einer Achse vor und hinter der eigentlichen Empfangsantenne angeordnet sind (siehe Skizze).



Eine einfallende elektromagnetische Welle der Frequenz ω induziert zeitabängige Dipolmomente in den Metallstäben, die sich mit der einfallenden Welle überlagern und das Signal in der Empfangsantenne schwächen oder verstärken. Die Ausrichtung und die Abstände der Metallstäbe sollen nun für die maximale Strahlungsleistung an der Empfangsantenne optimiert werden.

i. Wie sollten die Stäbe in der $x_2 - x_3$-Ebene ausgerichtet sein und warum?

ii. Beschränken Sie sich nun auf die x_1-Achse und betrachten Sie nur Empfangsantenne und Reflektor. Nehmen Sie an, dass der Reflektor die Welle mit einer Phasenverschiebung von $\Delta\varphi_R = \pi/2$ wieder abstrahlt und bestimmen Sie allgemein die Intensität $|< \underline{\Pi}_1 >|$ für die Summe der beiden Dipole in Abhängigkeit von d_R. Wie muss d_R gewählt werden, um ein maximales Signal in der Empfangsantenne zu erhalten?