



11. Retardierte Potentiale: rotierende Kugel

(10 Punkte)

Eine homogen geladene Vollkugel mit dem Radius R und der Gesamtladung Q beginne zur Zeit $t = 0$ um eine feste Achse durch ihren Mittelpunkt mit konstanter Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ zu rotieren. Der Mittelpunkt der Kugel sei $\underline{0}$. Bestimmen Sie mittels der retardierten Potentiale das von dieser Ladungs- und Stromverteilung erzeugte elektromagnetische Feld (also $\underline{E}$ und $\underline{B}$) in den Raumpunkten $\underline{x}$ mit $|\underline{x}| > R$ und für Zeiten t mit $ct \leq |\underline{x}| - R$ bzw. $ct \geq |\underline{x}| + R$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch und interpretieren Sie die einzelnen Beiträge zu $\underline{E}$ und $\underline{B}$ (eine Skizze könnte hilfreich sein). Erläutern Sie insbesondere die Zeitabhängigkeit von $\underline{E}(\underline{x}, t)$ und $\underline{B}(\underline{x}, t)$ für $|\underline{x}| > R$ und gehen Sie (qualitativ) auf den Zeitraum $|\underline{x}| - R < ct < |\underline{x}| + R$ ein.

12. Quadrupolmoment

(8 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich das Poisson-Integral

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \quad (1)$$

für große Entfernungen $|\underline{x}| \gg |\underline{x}'|$ von einer inselartigen Ladungsverteilung $\rho(\underline{x}')$ entwickeln lässt gemäß

$$4\pi\epsilon_0\Phi \approx \sum_{i=0}^2 \tilde{\Phi}_i \quad . \quad (2)$$

Dabei wurde das Koordinatensystem so gewählt, dass der Koordinatenursprung in dem Bereich liegt, in dem die Ladungen sind. Die ersten beiden Terme Φ_0 und Φ_1 der Entwicklung sind gegeben durch

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{Q}{r} \quad \text{mit} \quad Q = \int dV' \rho(\underline{x}') \quad ; \quad (3)$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \underline{p} = \int dV' \rho(\underline{x}') \underline{x}' \quad . \quad (4)$$

(5)

(a) Zeigen Sie nun, dass

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{\underline{x}^T \cdot \underline{q} \cdot \underline{x}}{2r^5} \quad \text{mit} \quad \underline{q} = \int dV' \rho(\underline{x}') \left[3\underline{x}' \otimes \underline{x}' - (r')^2 \underline{1} \right] \quad . \quad (6)$$

Der Tensor $\underline{q}$ wird als *Quadrupolmoment* bezeichnet.

- (b) Wie viele unabhängige Komponenten hat die Matrix q_{ij} ? (Beweis!)
- (c) Betrachten Sie einen Körper mit der Massendichte $\rho_m(\underline{x})$, dessen Trägheitstensor Θ_{ij} bekannt sei. Nehmen Sie an, der Körper sei mit der Ladungsdichte

$$\rho(\underline{x}) = \frac{Q}{M} \rho_m(\underline{x}) \quad (7)$$

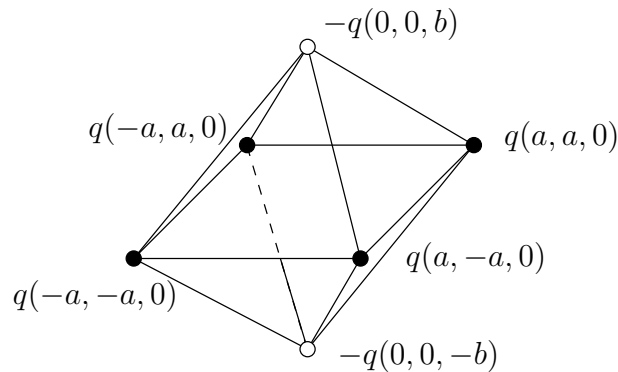
belegt. Dabei bezeichnen Q und M die (konstante) Gesamtladung bzw. Gesamtmasse des Körpers.

Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Komponenten des Quadrupoltensors q_{ij} der Ladungsverteilung $\rho(\underline{x})$.

13. Multipolentwicklung: Beispiele

(7 Punkte)

Nun sollen als Beispiel noch Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment sowie die entsprechenden Beiträge zum Potential $\Phi(\underline{x})$ für zwei konkrete Ladungsverteilungen berechnet werden:



- (a) Die skizzierte Anordnung von sechs Punktladungen.
- (b) Zylinder mit Radius R und Länge L , der mit der homogenen Ladungsdichte

$$\rho(\underline{x}) = \{\rho_0; \text{ für } -L/2 \leq x_3 \leq L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \quad (8)$$

belegt ist.

14. Klassische Lebensdauer eines Wasserstoffatoms

(5 Punkte)

Klassisch nimmt man an, dass sich Elektronen auf Kreisbahnen um den Kern bewegen. Da eine Kreisbewegung jedoch eine beschleunigte Bewegung darstellt, strahlt das Elektron gemäß dem Larmorschen Theorem Energie ab. Dieser Energieverlust würde dazu führen, dass ein Elektron innerhalb kürzester Zeit in den Atomkern stürzt. In dieser Aufgabe soll die Zeitskala dieses Prozesses für das Wasserstoffatom abgeschätzt werden. Nehmen Sie dazu an, dass das Elektron zunächst im Abstand a_0 (Bohrscher Radius) um das Proton kreist. Außerdem sei die Energie des Elektrons näherungsweise durch seine potentielle Energie $U_{pot} = -q\Phi$ gegeben. Verwenden Sie nun das Larmorsche Theorem um über die Bewegungsgleichung zu einer Differentialgleichung für den Kernabstand $a(t)$ zu gelangen. aus der sich die Zeit τ ergibt, nach der das Elektron den Kern erreicht. Geben Sie τ an.