INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2013

4. Übungsblatt Abgabe: Mo., 22.04.2013 bis 17 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

7. **Kugelschale im homogenen elektrischen Feld** **(11 Punkte)**

Wir wollen nun eine weitere Anwendung der Legendre-Polynome kennen lernen. Dazu betrachten wir eine leitende Kugelschale mit Radius R in einem statischen elektrischen Feld, das in grösserer Entfernung von der Kugel homogen ist,

$$\underline{E}(r \to \infty) = \underline{E}_\infty = E_0 \underline{e}_z \quad . \tag{1}$$

Der Koordinatenursprung soll im Mittelpunkt der Kugel liegen. Bestimmen Sie nun das elektrische Potential $\Phi(\underline{x})$ inner- und außerhalb der Kugelschale.

(a) Begründen Sie zunächst, dass sich die allgemeine Lösung für $\Phi(\underline{x})$ schreiben lässt als

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \quad . \tag{2}$$

Das Problem besteht jetzt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l aus den Randbedingungen. Die Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l im Innenraum ($r < R$) unterscheiden sich natürlich von denen im Außenraum ($r > R$).

(b) Auf der Kugeloberfläche sei das Potential konstant,

$$\Phi(R, \theta) = \Phi_0 \quad . \tag{3}$$

Geben Sie das Potential und das elektrische Feld im Inneren der Kugel an.

(c) Geben Sie das Potential $\Phi(r, \theta)$ im Außenraum der Kugelschale an.

(d) Diskutieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien und skizzieren Sie diese.

(e) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ sowie die Gesamtladung Q auf der Kugel. Interpretieren Sie die Terme, die in $\Phi(r, \theta)$ auftreten. Geben Sie das Potential $\Phi_\sigma(r, \theta)$ der Oberflächenladungen für den Fall $Q = 0$ durch Vergleich mit Ihrem Ergebnis für $\Phi(r, \theta)$ für $r > R$ und $r < R$ an.

Bitte wenden ⟶

8. **Herleitung des Poisson-Integrals** **(9 Punkte)**

Die Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \,\Phi\,(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0} \tag{4}$$

ergibt sich als Grenzfall $v \to \infty$ der Wellengleichung

$$\Box\Phi(\underline{r},t) = \partial_{\underline{x}}^2\Phi(\underline{r},t) - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\Phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\epsilon_0} \tag{5}$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der allgemeinen Lösung von Gl. (4) über die Fourier-Transformation. Unter der Fouriertransformation $\hat{T}_F$ einer Funktion $f\,(\underline{r},t) \mapsto f\,(\underline{k},\omega)$ verstehen wir den Ausdruck

$$\hat{T}_F = \mathcal{F}(k_x,k_y,k_z,\omega) = \mathcal{F}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4}\int f(\underline{r},t)\,e^{-i(\underline{k}\,\underline{r}+\omega t)}\,dV\,dt. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\Phi(\underline{k},\omega) = \frac{\rho(\underline{k},\omega)}{\epsilon_0} \tag{7}$$

gilt, wenn $\Phi(\underline{r},t)$ und $\rho(\underline{r},t)$ die Wellen-Gleichung erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass die Rücktransformation von Gleichung (7) auf die Form

$$\Phi(\underline{r},t) = \int G\left(\underline{r}-\underline{r}\,',t-t'\right)\,\rho\left(\underline{r}\,',t'\right)\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' \tag{8}$$

mit

$$G\left(\underline{r}-\underline{r}\,',t-t'\right) = \frac{1}{(2\pi)^4\epsilon_0}\int\frac{e^{i\{\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')+\omega(t-t')\}}}{|\underline{k}|^2-\frac{\omega^2}{v^2}}\mathrm{d}V_k\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

führt.

(c) Für die weitere Rechnung wollen wir uns nun auf die Poisson-Gleichung beschränken. Die Greensche Funktion vereinfacht sich dann zu

$$G\left(\underline{r}-\underline{r}\,'\right) = \frac{1}{(2\pi)^3\epsilon_0}\int\frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')}}{|\underline{k}|^2}\mathrm{d}V_k \quad . \tag{10}$$

Berechnen Sie $G\,(\underline{r}-\underline{r}\,')$. Führen Sie dazu die Integration in Kugelkoordinaten im k-Raum durch.

Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{für} \qquad a > 0 \quad .$$

(d) Zeigen Sie, dass man als Endergebnis für die Lösung der Poisson-Gleichung (4)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho\left(\underline{r}'\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\mathrm{d}V' \tag{11}$$

erhält und interpretieren Sie dieses Ergebnis.