INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2013

3. Übungsblatt Abgabe: Mo., 15.04.2013 bis 17 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

5. **Die Laplace-Gleichung** **(15 Punkte)**

Die *Poisson*-Gleichung

$$\partial^2_{\underline{x}}\, \Phi(\underline{r}) = -\frac{\varrho(\underline{r})}{\epsilon_0} \tag{1}$$

erlaubt die Berechnung des elektrischen Potentials $\Phi(\underline{r})$ einer beliebigen Ladungsverteilung $\varrho(\underline{r})$. Ist man jedoch nur am Potential in einem ladungsfreien Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ interessiert, so wird aus der Poisson-Gleichung die *Laplace*-Gleichung (bei uns meistens mit *Dirichlet*-Randbedingungen),

$$\begin{cases} \partial^2_{\underline{x}}\, \Phi &= 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi &= f(\underline{r}) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} ; \tag{2}$$

wobei $f(\underline{r})$ eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$ beschreibt. Im Folgenden wollen wir die Lösung der Laplace-Gleichung für kartesische- und Kugelkoordinaten bestimmen.

(a) Geben Sie $\Phi(\underline{r})$ allgemein mit Hilfe des Separationsansatzes

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = U_n(x_1)V_n(x_2)W_n(x_3) \tag{3}$$

an.

(b) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $\Phi(\underline{r}) = P(\cos\theta)\, Q(\phi)\, U(r)/r$ aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $P(\cos\theta), Q(\phi)$ und $U(r)$ ab. Die prinzipielle Vorgehensweise sollte Ihnen dabei aus der Quantenmechanik von der Behandlung des Wasserstoffatoms bekannt sein.

i. Bestimmen Sie $Q_m(\phi)$. Warum sind nur die Werte $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zugelassen?

ii. Zeigen Sie, dass $U(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$ die allgemeine Lösung der DGL für $U(r)$ (Radialgleichung) ist.

iii. Überprüfen Sie, dass Sie für $P(\cos\theta)$ jetzt die DGL

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0; \quad x = \cos\theta \tag{4}$$

erhalten. λ ist eine Konstante. Die Lösungen dieser DGL werden als die *zugeordneten Legendre-Polynome* $P_l^{(m)}(x)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass im Fall von zylindrischer Symmetrie ($m = 0$) die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l; \quad l \in \mathbb{N} \tag{5}$$

die DGL (4) lösen. Geben Sie die fünf niedrigsten $P_l(x)$ an.
Hinweis: Differenzieren Sie $(l+1)$-mal die Gleichung

$$(x^2-1)\frac{d(x^2-1)^l}{dx} = 2lx(x^2-1)^l.$$

(c) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten an.

6. **Gauß-Koeffizienten** **(5 Punkte)**

Die in der letzten Aufgabe gefundene allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung kann zum Beispiel dazu genutzt werden, um das Magnetfeld eines Planeten möglichst gut zu charakterisieren. Dies wurde zuerst von dem in Braunschweig geborenen Mathematiker Carl Friedrich Gauß 1838 beschrieben. Wir wollen dies nun an zwei Beispielen nachvollziehen.

(a) In der Umgebung eines Planeten kann der Beitrag der magnetosphärischen Ströme ebenso wie zeitliche Änderungen des elektrischen Feldes vernachlässigt werden. Benutzen Sie für diese Situation das Amperesche Gesetz um zu zeigen, dass sich das Magnetfeld als Gradient eines skalaren Potentials Ψ schreiben lässt,

$$\underline{B} = -\partial_{\underline{x}}\Psi \quad . \tag{6}$$

(b) Begründen Sie anhand Ihrer Ergebnisse aus der letzten Aufgabe, dass sich Ψ schreiben lässt als

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R_p \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_p}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\left[g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)\right] \quad . \tag{7}$$

R_p ist der Radius des Planeten und die g_n^m und h_n^m werden als *Gauß-Koeffizienten* bezeichnet.

(c) Für das Magnetfeld der Erde findet man

$$g_1^0 \approx 30000\,\mathrm{nT} \quad ; \qquad g_2^0 \approx -2300\,\mathrm{nT} \quad ; \qquad g_3^0 \approx 1300\,\mathrm{nT} \quad ;$$

für Merkur sind die Koeffizienten

$$g_1^0 \approx -200\ ,\mathrm{nT} \quad ; \qquad g_2^0 \approx -65\,\mathrm{nT} \quad ; \qquad g_3^0 \approx -15\,\mathrm{nT} \quad .$$

Was sagen diese Werte über die jeweiligen Magnetfelder aus? Betrachten Sie auch das Verhältnis $g_2^0/(2g_1^0)$.