Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

ELEKTRODYNAMIK

Skriptum zur Vorlesung

Dritte, überarbeitete Auflage

Sommersemester 2013

Prof. Dr. U. Motschmann

Dr. S. Simon

Dipl.-Phys. H. Kriegel

Braunschweig, 2013

Inhaltsverzeichnis

I Vektoranalysis **7**

1 Integrale im dreidimensionalen Raum 7

1.1 Linienintegrale 7

1.2 Oberflächenintegrale 9

1.3 Volumenintegrale 11

2 Differentialoperatoren 12

2.1 Gradient 12

2.2 Divergenz und Gaußscher Satz 13

2.3 Rotation und Stokesscher Satz 15

2.4 Vektorgradient 16

2.5 Totale Differentiale 16

3 Mehrfache Differentialoperatoren 17

3.1 Laplace-Operator 17

3.2 div rot 18

3.3 rot grad 18

3.4 Weitere Operatoren 19

4 Integralsätze 19

4.1 Derivate des Stokesschen und des Gaußschen Satzes 19

4.2 Die Greenschen Integralformeln 20

5 Differentialoperatoren in krummlinigen orthogonalen Koordinaten 20

5.1 Krummlinige orthogonale Koordinaten 20

5.2 Differentialoperatoren 22

6 Allgemeine Zusammenhänge zwischen Feldern 24

6.1 Kontinuitätsgleichung 24

6.2 Darstellung von stationären Feldern durch Quellen und Wirbel 25
6.3 Feldgleichungen im zeitabhängigen Fall 30

II Allgemeine Grundlagen der Maxwell-Theorie 31

1 Feldgleichungen 31
2 Materialgleichungen 33
3 Polarisation und Magnetisierung 34
4 Anisotropie und Inhomogenität 35
5 Bilanz der elektrischen Ladung 35
6 Weitere Bilanz - Gleichungen 36
6.1 Bilanz der elektromagnetischen Energie 36
6.2 Bilanz des elektromagnetischen Impulses 37
6.3 Bilanz des elektromagnetischen Drehimpulses 39
7 Elektromagnetische Potentiale 40
8 Eichtransformationen 41
8.1 Lorentz-Eichung 42
8.2 Coulomb-Eichung 43
9 Retardierte und avancierte Potentiale 45
10 Multipol-Entwicklung 48
11 Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung 52
11.1 Lienard- Wiechert- Potentiale 52
11.2 Feldberechnung aus den Lienard - Wiechert - Potentialen 54
11.3 Berechnung des Poynting - Vektors 60
11.4 Abstrahlung 60
11.5 Beispiele für strahlende Ladung 63
12 Elektromagnetische Wellen 64
12.1 Ebene Wellen in homogenen und isotropen Isolatoren 64
12.2 Kugelwellen in homogenen und isotropen Isolatoren 66
12.3 Ebene Wellen in homogenen und isotropen Leitern 67
13 Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes und der Stromdichte 69
14 Elektromagnetische Kraft und Drehmoment 72
14.1 Elektromagnetische Kraftdichte 73

14.2 Elektromagnetische Drehmomentendichte . . . 75
15 Hohlraumstrahlung . . . 77
15.1 Bedeutung der Hohlraum-Strahlung . . . 77
15.2 Zerlegung des Strahlungsfeldes . . . 78
15.3 Energie der Hohlraum-Strahlung . . . 82
15.4 Ultraviolett-Katastrophe . . . 83

III Einführung in die spezielle Relativitätstheorie 85

1 Die Relativitätsprinzipien der Newtonschen Mechanik und der Elektrodynamik . . . 85
2 Eigentliche Lorentz-Transformation . . . 87
3 Folgerungen aus der Lorentz-Transformation . . . 89
3.1 Relativierung der Gleichzeitigkeit . . . 89
3.2 Längenkontraktion . . . 89
3.3 Zeitdilatation . . . 90
3.4 Additionstheoreme für Geschwindigkeiten . . . 91
4 Der Minkowski-Raum . . . 92
5 Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Größen . . . 98
5.1 Tensoren im Minkowski-Raum (Definitionen) . . . 100
5.2 Tensordarstellung der Maxwell-Theorie . . . 102
5.3 Durchführung der Lorentz-Transformation elektromagnetischer Größen . . . 105
5.4 Das elektromagentische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung . . . 107
6 Speziell-relativistische Punktmechanik . . . 110
6.1 Vierdimensionale Bewegungsgleichung . . . 111
6.2 Elektromagnetische Viererkraft . . . 113

IV Spezialfälle 115

1 Statisches elektrisches Feld . . . 115
1.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen . . . 115
1.2 Feldberechnungen einfacher Ladungsverteilungen . . . 116
1.3 Feldberechnungen beim Vorhandensein von Leitern . . . 120
1.4 Feldberechnung beim Vorhandensein dielektrischer Grenzflächen . . . 122
1.5 Elektrostatische Energie eines Systems von Punktladungen . . . 125

1.6 Elektrostatische Energie eines Systems von Leitern 127
1.7 Elektrische Multipole 128
2 Statisches magnetisches Feld 130
2.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen 130
2.2 Brechungsgesetz für B-Feldlinien 131
2.3 Feld eines magnetischen Dipols 131
2.4 Homogen magnetisierte Kugel 132
3 Stationäres magnetisches Feld 134
3.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen 134
3.2 Das Biot-Savart-Gesetz 135
3.3 Feldberechnungen 136
4 Quasistationäres elektromagnetisches Feld 138
4.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen 138
4.2 Magnetischer Fluß und Induktion 139
4.3 Kirchhoffsche Regeln 140
4.4 Magnetische Energie eines Systems von Stromkreisen 141

Satz: LaTeX2$_\varepsilon$

Wir danken Joachim Müller, Christoph Koenders und Philip Heinisch, die mit viel Engagement und Sorgfalt die überarbeiteten Fassungen dieses Skripts erstellt haben.

Braunschweig, 25. Juli 2013

Uwe Motschmann, Sven Simon und Hendrik Kriegel

KAPITEL I

VEKTORANALYSIS

Vektorfelder sind räumlich variable Vektoren. Um die räumliche Variation zu beschreiben, müssen Vektorveränderungen betrachtet werden, d.h. räumliche Differentialquotienten. Beziehungen von Vektorfeldern untereinander, einschließlich deren räumliche und auch zeitliche Differentialquotienten, stellen partielle Differentialgleichungen dar, die physikalische Situationen und Prozesse beschreiben. Die Lösung dieser Gleichungen führt auf die Umkehroperation — die Integration. In diesem Abschnitt werden wichtige Definitionen und Sätze zusammengestellt.

1 Integrale im dreidimensionalen Raum

1.1 Linienintegrale

Problem: Über einen räumlich veränderlichen Vektor ist längs einer vorgegebenen Kurve zu integrieren, wobei nur die Komponente des Vektors tangential zur Kurve interessiert.

Folgende Umschreibungen sind möglich:

$$\int_C \underline{v}(\underline{x})d\underline{x} = \int_1^2 \underline{v}(\underline{x})d\underline{x} = \int_1^2 v_t ds = \int_1^2 (v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3) \quad . \tag{I.1}$$

$v_t(\underline{x})$ ist die Tangentialkomponente von $\underline{v}(\underline{x})$ an C, ds ist das Bogenelement von C. Der rechte Term drückt das Integral in den Komponenten eines kartesischen Koordinatensystems aus. Bei Kurven besonderer Symmetrie (Kreisbögen, gerade Linien etc.) ist die Wahl eines geeigneten Basis-Systems (z.B. Kugelkoordinaten) zweckmäßig.

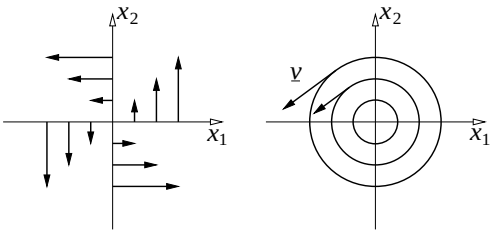
Von besonderer Bedeutung sind Linien-Integrale über geschlossene Wege, z.B.

$$Z = \oint_C \underline{v}(\underline{x})d\underline{x} \quad . \tag{I.2}$$

1. Beispiel

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

sei ein zirkuläres Strömungsfeld. Z ist die Zirkulation.



(a) Berechnung von Z entlang eines Kreises mit dem Radius ρ_0.

Für die Geschwindigkeit der Strömung in Zylinderkoordinaten gilt

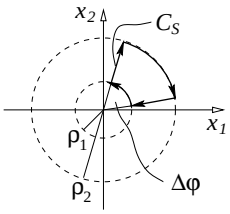
$$v_\rho = 0\,, \quad v_\varphi = \omega\rho\,, \quad v_z = 0 \quad .$$

Das Integral ergibt in diesen Koordinaten

$$Z = \oint_{C_S} \underline{v}(\underline{x})\,d\underline{x} = \int \left(v_\rho d\rho + v_\varphi \rho\, d\varphi + v_z dz\right) \quad .$$

Folglich

$$Z = \oint_{C(\rho_0)} \omega\rho \cdot \rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \omega\rho_o^2 d\varphi = 2\pi\omega\rho_0^2$$

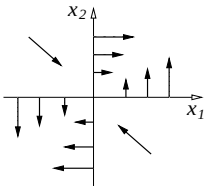


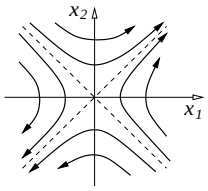
(b) Berechnung von Z entlang eines Kreisring-Segmentes C_S.

Da $v_\rho = 0$, liefern die radialen Wegstücke keinen Beitrag. Wir erhalten

$$Z = \int \omega\rho^2 d\varphi = \omega\left(\rho_1^2 - \rho_2^2\right)\partial_{\underline{x}}^2\varphi \quad .$$

2. Beispiel



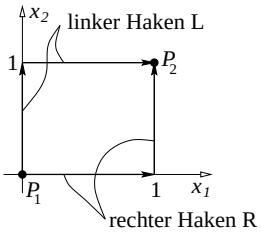


Integration eines Kraftfeldes $\underline{F}(\underline{x})$ zwischen zwei Punkten 1 und 2:

$$A_{21} = \int_1^2 \underline{F}(\underline{x})\,d\underline{x} \quad .$$

Dieses Integral bedeutet die Arbeit, die verrichtet werden muß, um einen Massenpunkt von 1 nach 2 längs eines bestimmten Weges in diesem Kraftfeld zu bewegen.

Sei $\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Konstanten $\alpha > 0$.



Verschieben von P_1 nach P_2 auf zwei unterschiedlichen Wegen.

$$\int_L \underline{F}(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_L (F_1 dx_1 + F_2 dx_2) = \int_0^1 F_2 dx_2 + \int_0^1 F_1 dx_1$$
$$= \int_0^1 \alpha\cdot 0\, dx_2 + \int_0^1 \alpha\cdot 1\, dx_1 = \alpha$$

$$\int_R \underline{F}(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_R (F_1 dx_1 + F_2 dx_2) = \int_0^1 F_1 dx_1 + \int_0^1 F_2 dx_2 = \int_0^1 \alpha\cdot 0\, dx_1 + \int_0^1 \alpha\cdot 1\, dx_2 = \alpha$$

Offensichtlich ist die verrichtete Arbeit auf beiden Wegen gleich. Für das angegebene Kraftfeld ist die Arbeit generell wegunabhängig, denn es gilt nach dem Satz von Schwarz

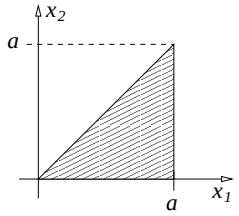
$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \alpha = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

1.2 Oberflächenintegrale

Problem: Im Raum ist eine Fläche vorgegeben. Auf dieser Fläche ist in allen ihren Punkten eine physikalische Größe (Skalar oder Vektor) gegeben. Das Integral der physikalischen Größe über die Fläche ist zu bestimmen.

Die Oberfläche kann beliebig gekrümmt sein. Im einfachsten Fall ist die Oberfläche eine Koordinaten-Ebene. Es ist also eine zweifache Integration über die zwei die Fläche beschreibenden Variablen auszuführen.

Beispiel



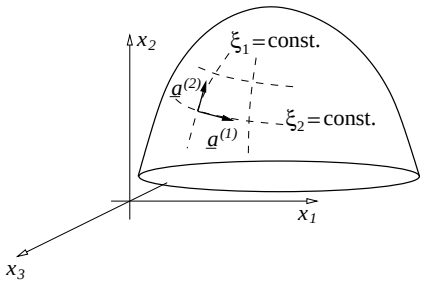
Die zu integrierende Funktion sei das Skalar $x_1^2 - x_2^2$. Die Integrationsfläche liege in der Ebene $x_3 = 0$ und sei begrenzt durch die Geraden $x_1 = x_2$, $x_2 = 0$ und $x_1 = a$.

Zu berechnen ist

$$\int_A \left(x_1^2 - x_2^2\right) dx_1 dx_2 = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \left(x_1^2 - x_2^2\right) = \int_0^a dx_1 \left[x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_2^3\right]_0^{x_1} = \int_0^a dx_1 \frac{2}{3}x_1^3 = \frac{1}{6}a^4$$

Die Integration über x_2 muß zuerst ausgeführt werden, da ihre Grenze x_1 enthält.

Oft sind die Integrale jedoch über beliebig gekrümmte Flächen auszuführen. Dann ist die Fläche in geeigneten Koordinaten darzustellen und das Integral auf diese neuen Koordinaten umzuschreiben. Wie sich eine Linie (Kurve) durch einen Parameter, die Bogenlänge s, beschreiben läßt, so ist eine Fläche durch zwei Parameter (ξ_1, ξ_2) beschreibbar, die gleichzeitig ein Koordinatensystem auf der krummen Fläche beschreiben. Die Parameterdarstellung der Fläche lautet dann



$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2) \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{I.4}$$

Für ein Linienelement auf der Fläche folgt

$$dx_i = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k \quad \text{und} \quad ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2 = \sum_{k,l=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} d\xi_k d\xi_l \quad . \tag{I.5}$$

Mit den Vektoren

$$\underline{a}^{(1)} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right) \quad , \quad \underline{a}^{(2)} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\right) \tag{I.6}$$

und den metrischen Koeffizienten

$$g^{11} = \underline{a}^{(1)} \cdot \underline{a}^{(1)} \quad , \quad g^{22} = \underline{a}^{(2)} \cdot \underline{a}^{(2)} \quad , \quad g^{12} = g^{21} = \underline{a}^{(1)} \cdot \underline{a}^{(2)} \tag{I.7}$$

folgt

$$ds^2 = \sum_{k,l=1}^{2} g^{kl} d\xi_k d\xi_l \quad . \tag{I.8}$$

Diese Darstellung heißt auch die erste Gaußsche Fundamentalform der Fläche. $g^{12}(\xi_1, \xi_2) = \underline{a}^{(1)} \cdot \underline{a}^{(2)} = 0$ ist offenbar notwendig und hinreichend dafür, daß die krummlinigen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 orthogonal sind, und zwar für alle Punkte der Fläche.

Das von den Koordinaten ξ_1 und ξ_2 aufgespannte Flächenelement ist definiert durch

$$d\underline{S} = \underline{a}^{(1)} d\xi_1 \times \underline{a}^{(2)} d\xi_2 \quad . \tag{I.9}$$

Das Flächenelement ist ein Vektor senkrecht auf der Fläche, in Richtung der Normalen. Da

$$dS = |d\underline{S}| = \sqrt{\left(\underline{a}^{(1)} \times \underline{a}^{(2)}\right)^2} d\xi_1 d\xi_2 \tag{I.10}$$

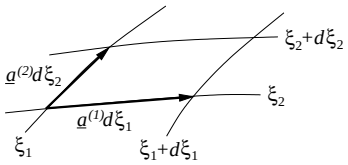
folgt wegen

$$\left(\underline{a}^{(1)} \times \underline{a}^{(2)}\right)^2 = \left(\underline{a}^{(1)}\right)^2 \cdot \left(\underline{a}^{(2)}\right)^2 - \left(\underline{a}^{(1)} \cdot \underline{a}^{(2)}\right)^2 \tag{I.11}$$

für den Betrag des Flächenelements

$$dS = \sqrt{g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}}\, d\xi_1 d\xi_2 \quad . \tag{I.12}$$

Damit ist das Problem der Integration über eine beliebige Fläche auf ein einfaches zweidimensionales Integral zurückgeführt. Es bleiben lediglich Integrand und Integrationsgrenzen durch die Flächenparameter (-koordinaten) auszudrücken. Für einfache Flächen wie Kugel, Zylinder oder Ebene ist es leicht, entsprechende Koordinaten zu finden.



Physikalisch treten Oberflächenintegrale oft nur in Verbindung mit einem Vektor als Integranden in den Formen

$$\Psi = \iint_S \underline{j} \cdot d\underline{S} \tag{I.13}$$

oder

$$\underline{\Omega} = \iint_S \underline{v} \times d\underline{S} \tag{I.14}$$

auf. Das Integral Ψ heißt Fluß der Größe $\underline{j}$ durch die Fläche S. Wegen

$$\underline{j} \cdot d\underline{S} = j_n dS \quad , \tag{I.15}$$

wobei j_n die Normalkomponente darstellt, geht nur die Komponente von $\underline{j}$ senkrecht zur Fläche ein.

Wichtig ist auch hier wieder der Spezialfall des Integrals über eine *geschlossene* Fläche S. Das Integral stellt dann den gesamten aus dem umschlossenen Volumen austretenden Fluß dar. Ist $\underline{v}$ eine Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit, so ist

$$\iint_S \underline{v} \cdot d\underline{S}$$

das pro Zeiteinheit durch die Fläche S hindurchgehende Flüssigkeitsvolumen. Ist $\underline{j}$ eine Stromdichte, so ist

$$\iint_S \underline{j} \cdot d\underline{S}$$

der durch S fließende Strom. Für elektrische und magnetische Felder heißen

$$\iint_S \underline{D} \cdot d\underline{S} \quad \text{und} \quad \iint_S \underline{B} \cdot d\underline{S}$$

elektrischer bzw. magnetischer Fluß.

Bei der Form

$$\iint_S \underline{v} \times d\underline{S}$$

gehen nur die Komponenten von $\underline{v}$, die parallel zur Fläche S liegen, in das Integral ein.

1.3 Volumenintegrale

Unter einem Volumenintegral versteht man die Integration einer physikalischen Größe über ein dreidimensionales Gebiet. Ein einfaches Beispiel ist die Berechnung der Masse eines Volumens bei vorgegebener Massendichte $\rho(\underline{x})$:

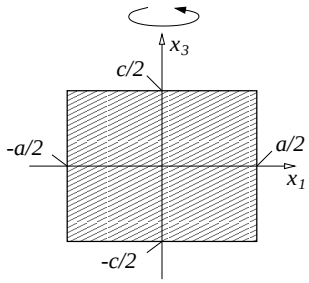
$$M = \iiint_V \rho(\underline{x}) dV = \iiint_V \rho(\underline{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \quad . \tag{I.16}$$

Von kartesischen kann auf andere, der Symmetrie des Problems angepaßte Koordinaten umgerechnet werden.

Ein weiteres Beispiel für ein Volumenintegral ist das Trägheitsmoment eines Körpers. Exemplarisch werde hier das Trägheitsmoment eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, c berechnet. Die Drehachse geht durch den Schwerpunkt und ist parallel zu c. Die Dichte ρ ist konstant.

Dann gilt

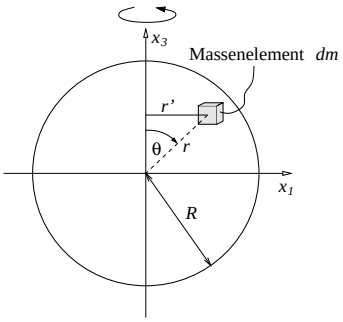
$$\begin{aligned} I_c &= \int_{\text{Quader}} \rho \left(x_1^2 + x_2^2\right) dV \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int_{-b/2}^{b/2} dx_2 \int_{-c/2}^{c/2} dx_3 \, \rho \left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ &= \frac{\rho}{3} \left\{ \left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3 \right] \cdot bc + a \cdot \left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3 \right] \cdot c \right\} \\ &= \frac{\rho abc}{12} \left(a^2 + b^2\right) = \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2\right) \quad . \end{aligned}$$



Für eine Kugel vom Radius R ergibt sich

$$I_R = \int_{\text{Kugel}} \rho \left(r^2 - r^2 \cos^2 \theta\right) dV \quad .$$

Folglich erhält man



$$
\begin{aligned}
I_R &= \rho \int\limits_{\text{Kugel}} \left(r'\right)^2 dV \\
&= \rho \int\limits_{\text{Kugel}} r^2 \sin^2\theta \; r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \\
&= \rho \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} d\theta \, r^4 \sin^3\theta \\
&= -2\pi\rho \frac{R^5}{5} \int\limits_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) d(\cos\theta) \\
&= -\frac{2}{5}\pi\rho R^5 \left[\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right) \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} R^5 \rho = \frac{2}{5} M R^2 \quad \text{mit } M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho
\end{aligned}
$$

2 Differentialoperatoren

2.1 Gradient

Startpunkt ist das skalare Feld $\Phi(\underline{x})$. Jedem skalaren Feld lassen sich Flächen konstanter Feldgröße ($\Phi =$ const.) zuordnen, die wir als Äquipotentialflächen bezeichnen wollen, unabhängig davon, welche physikalische Größe Φ darstellt.

Problem: Wie ändert sich das Feld beim Übergang vom Ort $\underline{x}$ nach $\underline{x} + d\underline{x}$?

Diese Änderung ist offenbar

$$d\Phi = \Phi(\underline{x} + d\underline{x}) - \Phi(\underline{x}) = \partial_{x_1}\Phi dx_1 + \partial_{x_2}\Phi dx_2 + \partial_{x_3}\Phi dx_3 \quad . \tag{I.17}$$

Die rechte Seite entspricht einem Skalarprodukt aus zwei Vektoren; der eine hat die Komponenten $\partial_{x_i}\Phi$, der andere dx_i, wobei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\underline{e}^i$ zugrunde gelegt ist. Den Vektor der Ableitungen eines skalaren Feldes bezeichnet man als Gradienten.

Definition

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\underline{x}}\Phi = \partial_{x_1}\Phi \underline{e}^1 + \partial_{x_2}\Phi \underline{e}^2 + \partial_{x_3}\Phi \underline{e}^3 \\
\text{oder} \quad &\partial_{\underline{x}}\Phi = \left(\partial_{x_1}\Phi, \partial_{x_2}\Phi, \partial_{x_3}\Phi\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{I.18}
$$

Der Differentialoperator grad ist damit durch

$$\partial_{\underline{x}} = \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}\right) \tag{I.19}$$

festgelegt. Ferner ist

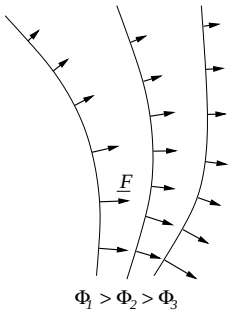
$$d\underline{x} = (dx_1, dx_2, dx_3) \tag{I.20}$$

das vektorielle Linienelement. Damit kann die Änderung des Feldes Φ über $d\underline{x}$ geschrieben werden als

$$d\Phi = \partial_{\underline{x}}\Phi \cdot d\underline{x} \tag{I.21}$$

Der Gradient eines skalaren Feldes stellt für jedes $\underline{x}$ einen Vektor dar. Die Operation grad ordnet jedem skalaren Feld ein Vektorfeld zu, z.B.

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\partial_{\underline{x}}\Phi(\underline{x}) \quad \text{bzw.} \quad F_i = -\partial_{x_i}\Phi \quad . \tag{I.22}$$



Geometrisch bedeutet dies eine Zuordnung von Feldlinien zu den Äquipotentialflächen. An jedem Punkt der Äquipotentialflächen läßt sich ein lokales orthogonales Koordinatensystem so einführen, daß zwei Basisrichtungen in die jeweilige Tangentialebene fallen. Für $d\underline{x}$ in der Tangentialebene verschwindet $d\Phi$ per definitionem. Nur für die dritte unabhängige Richtung senkrecht zu den Äquipotentialflächen ist $d\Phi \neq 0$. D.h. aber, der Vektor $\partial_{\underline{x}}\Phi$ steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen. Der Betrag von $\partial_{\underline{x}}\Phi$ ist umgekehrt proportional zum Abstand der Äquipotentialflächen.

Eingangs wurde festgestellt, daß sich jedem Skalarfeld durch Gradientenbildung ein Vektorfeld zuordnen läßt. Gilt das auch umgekehrt? Läßt sich einem Vektorfeld $\underline{F}$ durch Integration von

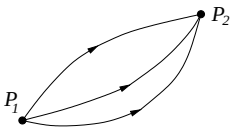
$$d\Phi = -F_1 dx_1 - F_2 dx_2 - F_3 dx_3 = -\underline{F} \cdot d\underline{x}$$

ein Φ zuordnen, so daß $F_i = -\partial_{x_i}\Phi$ gilt? Um das zu gewährleisten, müssen natürlich die gemischten zweiten Ableitungen von Φ übereinstimmen, also

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi = \partial_{x_j}\partial_{x_i}\Phi \quad , \quad i \neq j \quad . \tag{I.23}$$

Für $\underline{F}$ ist somit zu fordern

$$\partial_{x_2}F_3 = \partial_{x_3}F_2 \quad , \quad \partial_{x_3}F_1 = \partial_{x_1}F_3 \quad , \quad \partial_{x_1}F_2 = \partial_{x_2}F_1 \tag{I.24}$$



(Satz von Schwarz). Wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, ist $d\Phi$ integrierbar und es existiert ein $\underline{F}$ zugeordnetes Φ. Physikalisch bedeutet dies die Wirbelfreiheit von $\underline{F}$. Die Integration von $d\Phi$ zwischen zwei Raumpunkten P_1 und P_2 ist dann vom konkreten Weg unabhängig. Es gilt

$$\int_{P_1}^{P_2} d\Phi = -\int_{P_1}^{P_2} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \Phi(\underline{x}_2) - \Phi(\underline{x}_1) \quad , \tag{I.25}$$

wodurch Φ bis auf eine beliebige Integrationskonstante festgelegt ist.

2.2 Divergenz und Gaußscher Satz

Definition

Startpunkt ist ein Vektorfeld $\underline{F}(\underline{x})$. In kartesischen Koordinaten ist die Divergenz von $\underline{F}$ definiert durch

$$\partial_{\underline{x}}\underline{F} = \partial_{\underline{x}}\underline{F} = \partial_{x_1}F_1 + \partial_{x_2}F_2 + \partial_{x_3}F_3 \quad . \tag{I.26}$$

Per definitionem ist $\partial_{\underline{x}}\underline{F}$ ein Skalar. Die physikalische Bedeutung ergibt sich aus dem Gaußschen Satz.

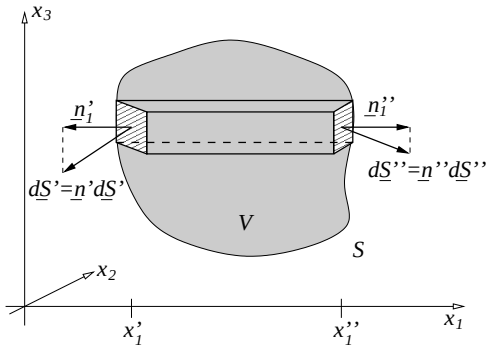
Gaußscher Satz

V ist ein Volumen und S die (geschlossene) Oberfläche von V. Dann gilt

$$\iiint_V \partial_{\underline{x}} \underline{F}\, dV = \iint_S \underline{F} \cdot d\underline{S} \tag{I.27}$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\underline{F} \cdot d\underline{S} = \underline{F} \cdot \underline{n} dS = (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3)\, dS \quad , \tag{I.28}$$



wobei $\underline{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf dem Flächenrand dS ist. Wir betrachten vorerst nur den ersten Summanden $F_1 n_1 dS$ und halten x_2 und x_3 fest. Dazu betrachten wir eine infinitesimal dünne Säule bei festem x_2 und x_3 im Volumen V. Die Deckflächen der Säule sind dS' und dS''. Es sind Elemente von S. Weiterhin gilt

$$n_1'' dS'' = dx_2 dx_3 \quad , n_1' dS' = -dx_2 dx_3 \quad . \tag{I.29}$$

Das „Oberflächenintegral“ eingeschränkt auf die Deckflächen der Säule ergibt dann

$$\sum_{dS',dS''} F_1 n_1 dS = F_1(x_1'', x_2, x_3) dx_2 dx_3 - F_1(x_1', x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad . \tag{I.30}$$

Wir betrachten nun die linke Seite des Gaußschen Satzes und berechnen das „Volumenintegral“ über die Säule zunächst auch nur für den ersten Summanden der Divergenz und erhalten

$$\iiint_{\text{Saeule}} \partial_{x_1} F_1\, dV = \iiint \partial_{x_1} F_1\, dx_1 dx_2 dx_3 = \left[F_1(x_1'', x_2, x_3) - F_1(x_1', x_2, x_3)\right] dx_2 dx_3 \quad . \tag{I.31}$$

Dies ist offensichtlich gleich dem aus der rechten Seite des Gaußschen Satzes berechneten Ausdruck. Aufsummieren über alle Säulen in V ergibt dann

$$\iiint_V \partial_{x_1} F_1\, dV = \iint_S F_1 n_1\, dS \quad . \tag{I.32}$$

Für die beiden anderen Summanden gilt analog

$$\iiint_V \partial_{x_2} F_2\, dV = \iint_S F_2 n_2\, dS \quad , \quad \iiint_V \partial_{x_3} F_3\, dV = \iint_S F_3 n_3\, dS \quad . \tag{I.33}$$

Die Summe über die drei Anteile ergibt den Gaußschen Satz, q.e.d.

Interpretation der Divergenz

Das Skalarprodukt $\underline{F} \cdot d\underline{S}$ beschreibt den Fluß von $\underline{F}$ durch die Fläche $d\underline{S}$. Nach dem Gaußschen Satz ist somit der Fluß von $\underline{F}$ durch die geschlossene Fläche S gleich der im Volumen enthaltenen Divergenz von $\underline{F}$. $\partial_{\underline{x}} \underline{F}$ beschreibt damit die Quellstärke des Feldes $\underline{F}$. Ist

$$\partial_{\underline{x}} \underline{F} = 0 \quad \forall \underline{x} \in V \quad ,$$

dann ist das Volumen V quellenfrei und der Gesamtfluß durch die V umschließende Fläche S verschwindet. Quellen negativer Stärke heißen Senken.

Der Gaußsche Satz ermöglicht noch eine koordinatenunabhängige Definition der Divergenz. Dazu betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{V\to 0} \iiint_V \partial_{\underline{x}} \underline{F}\, dV = \lim_{V\to 0} \iint_S \underline{F}\cdot d\underline{S} \quad .$$

Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ergibt

$$\lim_{V\to 0} \overline{\partial_{\underline{x}} \underline{F}}\cdot V = \lim_{V\to 0} \iint_S \underline{F}\cdot d\underline{S} \tag{I.34}$$

und folglich

$$\partial_{\underline{x}} \underline{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_S \underline{F} d\underline{S} \quad . \tag{I.35}$$

Die Divergenz eines Feldes $\underline{F}$ in einem Punkt $\underline{x}$ ist der Grenzwert des Quotienten aus dem Fluß durch eine den Punkt umschließende Oberfläche und dem Volumen des eingeschlossenen Bereichs.

2.3 Rotation und Stokesscher Satz

Bei der Einführung des Gradienten hatten wir

$$\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i \quad , \quad i \neq j \quad , \quad i,j = 1,2,3 \tag{I.36}$$

als Bedingungen angegeben, daß sich ein Vektorfeld $\underline{F}$ als Gradient eines Skalars Φ darstellen läßt. Diese Bedingungen lassen sich vektoriell zusammenfassen zu

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F} = 0 \quad \text{mit} \quad \partial_{\underline{x}} \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix} \tag{I.37}$$

$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F}$ heißt die Rotation von $\underline{F}$ oder auch *Wirbelstärke*. Verschwindet $\partial_{\underline{x}} \times \underline{F}$ heißt $\underline{F}$ wirbelfrei.

Um die Bedeutung der Rotation zu veranschaulichen betrachten wir zwei Geschwindigkeitsfelder $\underline{v}(\underline{x}), \underline{w}(\underline{x})$:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{w}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{I.38}$$

Diese Beispiele sind uns im Prinzip schon bekannt. Sie wurden im Abschnitt 1.1 skizziert und diskutiert. Die Berechnung der Rotation der Felder ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_{\underline{x}} \times \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad . \tag{I.39}$$

Im ersten Fall ist $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v}$ senkrecht zur Strömungsebene gerichtet, die Strömung $\underline{v}(\underline{x})$ dreht sich im positiven Sinn um die x_3-Achse. Das Feld $\underline{w}(\underline{x})$ hingegen ist wirbelfrei. Offenbar hängt das Verhalten von $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v}$ mit dem Verhalten der Zirkulation

$$Z = \oint \underline{v}\cdot d\underline{x} \quad \text{bzw.} \quad Z = \oint \underline{w}\cdot d\underline{x}$$

zusammen. Kondensiert ist dieser Zusammenhang im *Stokesschen Satz.*

Stokesscher Satz

$$\iint_S \partial_{\underline{x}} \times \underline{v}\cdot d\underline{S} = \oint_C \underline{v}\cdot d\underline{x} \quad , \tag{I.40}$$

wobei S eine offene Fläche und C deren geschlossene Randkurve darstellen[1]. Offenbar ist das Linienintegral über $\underline{v}$ längs der Randkurve C einer offenen Fläche S gleich dem Oberflächenintegral über $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v}$. In physikalischen Begrifflichkeiten bedeutet dies, das die Zirkulation von $\underline{v}$ längs einer vorgegebenen geschlossenen Kurve gleich dem Fluß von $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v}$ durch die von der Kurve umschlossenen Fläche ist. Wie sich die Fläche innerhalb ihrer Randkurve aufspannt ist gleichgültig. Ist $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v} \equiv 0$, das Feld also wirbelfrei, verschwindet auch die Zirkulation.

Durch den Grenzübergang zu einer infinitesimal kleinen Fläche S mit deren Normalen $\underline{n}$ folgt

$$(\partial_{\underline{x}} \times \underline{v})_n \equiv \underline{n} \cdot \partial_{\underline{x}} \times \underline{v} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \underline{v} d\underline{x} \tag{I.41}$$

als koordinatenunabhängige Definition der Wirbelstärke.

Zum Verständnis der Bezeichnung „Rotation“ führen wir noch ein einfaches Beispiel aus der Mechanik an. Wir betrachten ein Teilchen am Ort $\underline{x}$, welches mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ um eine Achse geführt wird. Dann gilt

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{x} \quad . \tag{I.42}$$

Rotationsbildung ergibt

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \partial_{\underline{x}} \times \underline{v} \quad . \tag{I.43}$$

Somit beschreibt $\partial_{\underline{x}} \times \underline{v}$ den in $\underline{v}$ enthaltenen Rotationsanteil.

2.4 Vektorgradient

Der Gradient wurde als Änderung eines Skalarfeldes beim Fortschreiten um $d\underline{x}$ eingeführt. Es soll nun versucht werden, eine ähnliche Beschreibung für ein Vektorfeld zu finden. Gefragt ist also nach der Änderung einer jeden Komponente eines Vektorfeldes $\underline{a}(\underline{x})$ beim Fortschreiten um $d\underline{x}$.

Es folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} da_i &= dx_1 \partial_{x_1} a_i + dx_2 \partial_{x_2} a_i + dx_3 \partial_{x_3} a_i \\ da_i &= \left(d\underline{x} \cdot \partial_{\underline{x}} \right) a_i \quad . \end{aligned} \tag{I.44}$$

Das Skalarprodukt ist hierbei zuerst auszuführen. Vermittels des dyadischen Produktes — symbolisiert durch $\otimes$ — läßt sich auch schreiben $d\underline{a} = d\underline{x} \cdot \partial_{\underline{x}} \otimes \underline{a}$.

2.5 Totale Differentiale

Wir betrachten ein Volumenelement dV in einer strömenden Flüssigkeit. Das Volumenelement befindet sich zur Zeit t am Ort $\underline{x}$ und habe die Massendichte $\rho(\underline{x}, t)$. Zur Zeit $t + dt$ befindet sich eben dieses Volumenelement am Ort $\underline{x} + \underline{v} dt$ und besitzt i.a. eine andere Massendichte $\rho(\underline{x} + \underline{v} dt, t + dt)$, da sich aufgrund der Strömungsverhältnisse etwa der Druck auf die Flüssigkeit ändert. An der Stelle $\underline{x}$ befindet sich zur Zeit $t + dt$ ein anderes Volumenelement mit der Dichte $\rho(\underline{x}, t + dt)$.

Es ist also zu unterscheiden zwischen einer lokalen Dichteänderung in der Zeit dt und der Dichteänderung eines in seiner Bewegung verfolgten Volumenelements. Die letztere heißt totale oder substantielle Änderung, die erstere die partielle oder lokale Änderung. Entsprechend werden die Differentialquotienten bezeichnet. Der lokale oder partielle Differentialquotient ist wie üblich $\partial_t \rho$ (hier wird der Ort $\underline{x}$ festgehalten). Der totale oder substantielle Differentialquotient ist

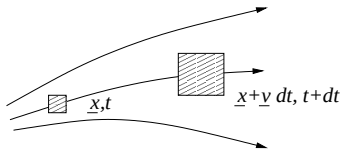
[1] Beweis in *Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd.II, S.199*

$$d_t\rho = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho(\underline{x}+\underline{v}\Delta t, t+\Delta t)-\rho(\underline{x},t)}{\Delta t} = \partial_t\rho + d_t\underline{x}\cdot\partial_{\underline{x}}\rho \quad ,$$
$$d_t\rho = \partial_t\rho + \underline{v}\cdot\partial_{\underline{x}}\rho \quad . \tag{I.45}$$

Bei einer vektoriellen Größe $\underline{a}(\underline{x},t)$, z.B. der Strömungsgeschwindigkeit selbst, ist entsprechend $\underline{a}(\underline{x}+\underline{v}dt, t+dt)$ und $\underline{a}(\underline{x},t+dt)$ mit $\underline{a}(\underline{x},t)$ zu vergleichen, und zwar für jede Komponente getrennt. Das liefert

$$d_t\underline{a} = \partial_t\underline{a} + (\underline{v}\partial_{\underline{x}})\underline{a} \quad . \tag{I.46}$$

Dies ist bereits ein Beispiel für das Auftreten des Vektor-Gradienten, der im vorhergehenden Abschnitt eingeführt wurde.



Diese Überlegungen zur substantiellen Änderung von Feldgrößen ($\rho(\underline{x},t)$ oder $\underline{a}(\underline{x},t)$) selbst, lassen sich nun auch auf Integrale über diese Feldgrößen anwenden, wobei sich das Integrationsgebiet jeweils mitbewegt. Das umfaßt die totale Änderung von Linienintegralen über sich bewegende Linien, von Oberflächenintegralen über sich bewegende Oberflächen und von Volumenintegralen über sich bewegende Volumina. Die totalen Ableitungen dieser Integrale sollen hier nur angegeben werden, für deren Ableitung verweisen wir z.B. auf *Smirnow, Höhere Mathematik, Bd.II, S. 317-319*.

Für ein Linienintegral $\int_C \underline{a}(\underline{x},t)d\underline{x}$, das längs einer sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ bewegenden und sich deformierenden Kurve C zu bilden ist, gilt

$$d_t\int_C \underline{a}\,d\underline{x} = \int_C \left(\partial_t\underline{a} + \partial_{\underline{x}}(\underline{v}\underline{a}) - \underline{v}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{a}\right)d\underline{x} \quad . \tag{I.47}$$

Für ein Oberflächenintegral bei sich deformierender Oberfläche S gilt

$$d_t\iint_S \underline{a}(\underline{x},t)\cdot d\underline{S} = \iint_S \left(\partial_t\underline{a} + \partial_{\underline{x}}\times(\underline{a}\times\underline{v}) + \underline{v}\partial_{\underline{x}}\underline{a}\right)\cdot d\underline{S} \tag{I.48}$$

und für ein Volumenintegral bei sich deformierenden Volumen V folgt

$$d_t\iiint_V \rho(\underline{x},t)\,dV = \iiint_V \left(\partial_t\rho + \partial_{\underline{x}}(\rho\underline{v})\right)dV \quad . \tag{I.49}$$

Auf den rechten Term kann desweiteren der Gaußsche Satz angewandt werden, was

$$d_t\iiint_V \rho(\underline{x},t)\,dV = \iiint_V \partial_t\rho\,dV + \iint_S \rho\underline{v}\cdot d\underline{S} \tag{I.50}$$

ergibt.

3 Mehrfache Differentialoperatoren

3.1 Laplace-Operator

Startpunkt ist ein skalares Feld $\Phi(\underline{x})$. Wird zuerst der Gradient und danach die Divergenz gebildet, gelangt man zum Laplace-Operator.

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi \equiv \partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}\Phi = \partial_{\underline{x}}\cdot\partial_{\underline{x}}\Phi = \partial_{\underline{x}}^2\Phi \quad . \tag{I.51}$$

Folglich ist in kartesischen Koordinaten

$$\partial_{\underline{x}}^2 = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 \quad . \tag{I.52}$$

Der Laplace-Operator ist auch auf Vektoren anwendbar. An die Stelle des Skalars Φ tritt eine Vektorkomponente:

$$\partial_{\underline{x}}^2 \underline{a} = (\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}) \underline{a} = (\partial_{\underline{x}} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{a} \quad . \tag{I.53}$$

3.2 div rot

Die Divergenz der Rotation eines Vektors verschwindet immer, denn

$$\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \times \underline{a} = \partial_{\underline{x}} \cdot (\partial_{\underline{x}} \times \underline{a}) = (\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}}) \cdot \underline{a} \equiv 0 \tag{I.54}$$

$\partial_{\underline{x}} \times \underline{a}$ ist somit immer quellenfrei. Folglich: Wenn ein Feld $\underline{B}(\underline{x})$ quellenfrei ist,

$$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0 \quad ,$$

so läßt sich $\underline{B}$ als Rotation eines beliebigen Feldes $\underline{A}(\underline{x})$ darstellen:

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad . \tag{I.55}$$

3.3 rot grad

Die Rotation eines Gradienten eines Skalarfeldes $\Phi(\underline{x})$ verschwindet immer, denn

$$\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \Phi = \partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \Phi) = (\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}}) \Phi \equiv 0 \quad . \tag{I.56}$$

Ein Vektorfeld $\underline{F}(\underline{x})$, daß durch Gradientenbildung aus einem Skalarfeld $\Phi(\underline{x})$ konstruiert wird, ist also immer wirbelfrei. Sei

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\partial_{\underline{x}} \Phi(\underline{x}) \quad ,$$

dann gilt

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F}(\underline{x}) = 0 \quad . \tag{I.57}$$

Diese Beziehung läßt sich auch koordinatenunabhängig aus dem Stokesschen Satz deduzieren. In Abschnitt 2.1 wurde die Wegunabhängigkeit des Linienintegrals

$$\int_{P_1}^{P_2} \partial_{\underline{x}} \Phi \cdot d\underline{x} = \Phi(P_2) - \Phi(P_1)$$

festgestellt. Folglich verschwindet das Integral über einen geschlossenen Weg und man erhält

$$0 = \oint_C \partial_{\underline{x}} \Phi \cdot d\underline{x} = \iint_S \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \Phi \, d\underline{x} \quad . \tag{I.58}$$

Da diese Beziehung nun für jede beliebige Fläche S gilt, ist zu folgern

$$\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \Phi \equiv 0 \quad . \tag{I.59}$$

Umgekehrt folgt für ein wirbelfreies Vektorfeld $\underline{F}$, d.h.

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F} = 0 \quad ,$$

daß ein Skalarfeld $\Phi(\underline{x})$ existiert, so daß $\underline{F}$ als

$$\underline{F} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \tag{I.60}$$

konstruierbar ist.

3.4 Weitere Operatoren

In physikalischen Anwendungen tritt eine Vielzahl zusammengesetzter bzw. hintereinander auszuführender Differentialoperatoren auf. Es ist von Fall zu Fall zu entscheiden, ob man das Resultat selbst ableiten oder lieber in einer Formelsammlung nachschlagen möchte. Das Einprägen häufig auftretender Konstruktionen beschleunigt sicherlich dann deren Ausrechnen.

Beispiele

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}) &= \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{A}) - \partial_{\underline{x}}^2 \underline{A} = \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{A}) - \partial_{\underline{x}}^2 A \\
\partial_{\underline{x}}(\underline{A} \times \underline{B}) &= \underline{B}(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}) - \underline{A}(\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}) \\
\partial_{\underline{x}} \times (\Phi \underline{A}) &= \Phi(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}) - \underline{A} \times \partial_{\underline{x}}\Phi \\
\partial_{\underline{x}}(\Phi \underline{A}) &= \Phi \partial_{\underline{x}}\underline{A} + \underline{A}\partial_{\underline{x}}\Phi
\end{aligned} \tag{I.61}$$

4 Integralsätze

4.1 Derivate des Stokesschen und des Gaußschen Satzes

Die für uns wichtigen Integralsätze sind nach Stokes und Gauß benannt. Wir haben sie bereits wiederholt verwendet und führen sie hier zur Vollständigkeit nochmals auf.

Stokesscher Satz

$$\oint_C \underline{A} \cdot d\underline{x} = \iint_S \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \cdot d\underline{S} \quad , \tag{I.62}$$

wobei C die Randkurve der Fläche S darstellt.

Gaußscher Satz

$$\iint_S \underline{A} \cdot d\underline{S} = \iiint_V \partial_{\underline{x}}\underline{A}\, dV \quad , \tag{I.63}$$

wobei S die Oberfläche des Volumens V darstellt.

Diese Sätze gelten nicht nur über die Summen, die die Skalarprodukte jeweils auf den linken und rechten Seiten repräsentieren, sondern sogar über die einzelnen Summanden getrennt. Kombiniert man diese Summanden-Terme neu, gelangt man zu Derivaten des Stokesschen und des Gaußschen Satzes, die mitunter sehr nützlich sind:

$$\oint_C \Phi d\underline{x} = \iint_S d\underline{S} \times \partial_{\underline{x}}\Phi \quad , \tag{I.64}$$

wobei C der Rand der offenen Fläche S ist.

$$\iint_S \Phi d\underline{S} = \iiint_V \partial_{\underline{x}}\Phi\, dV \tag{I.65}$$

$$\iint_S d\underline{S} \times \underline{A} = \iiint_V \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}\, dV \quad , \tag{I.66}$$

wobei S die geschlossene Randfläche des Volumens V ist. Es tritt hier eine vektorielle Multiplikation mit $d\underline{S}$ auf. Um ein Minuszeichen zu vermeiden, haben wir $d\underline{S}$ als ersten und den jeweiligen Integranden als zweiten Faktor geschrieben. Beispielsweise gilt aber natürlich

$$d\underline{S} \times \underline{A} = -\underline{A} \times d\underline{S} \quad . \tag{I.67}$$

Die Beweise für die angegebenen Sätze finden sich z.B. bei *Smirnow, Bd.II, S.296*.

4.2 Die Greenschen Integralformeln

Für einen Vektor, der aus zwei skalaren Feldern in der Form

$$\underline{F} = \Phi_1 \partial_{\underline{x}} \Phi_2$$

gebildet wird, liefert der Gaußsche Satz

$$\iint_S \Phi_1 \partial_{\underline{x}} \Phi_2 \cdot d\underline{S} = \iiint_V \partial_{\underline{x}} (\Phi_1 \partial_{\underline{x}} \Phi_2) dV \quad . \tag{I.68}$$

Weiterhin ist

$$\partial_{\underline{x}} (\Phi_1 \partial_{\underline{x}} \Phi_2) = \partial_{\underline{x}} \Phi_1 \cdot \partial_{\underline{x}} \Phi_2 + \Phi_1 \partial_{\underline{x}}^2 \Phi_2 \tag{I.69}$$

sowie

$$\partial_{\underline{x}} \Phi_2 \cdot d\underline{S} = \partial_n \Phi_2 \cdot dS \quad , \tag{I.70}$$

wobei $\partial_n \Phi_2$ die Ableitung von Φ_2 in Richtung der Normalen von $d\underline{S}$ bedeutet. So folgt die **erste Greensche Integralformel**

$$\iint_S \Phi_1 \partial_n \Phi_2 \, dS = \iiint_V (\Phi_1 \partial_{\underline{x}}^2 \Phi_2 + \partial_{\underline{x}} \Phi_1 \cdot \partial_{\underline{x}} \Phi_2) dV \quad . \tag{I.71}$$

In dieser Gleichung können wir Φ_1 und Φ_2 vertauschen und die neue von der alten Gleichung subtrahieren. Es resultiert mit

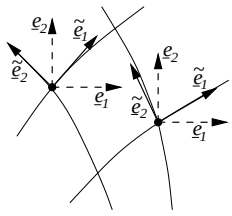
$$\iint_S (\Phi_1 \partial_n \Phi_2 - \Phi_2 \partial_n \Phi_1) dS = \iiint_V (\Phi_1 \partial_{\underline{x}}^2 \Phi_2 - \Phi_2 \partial_{\underline{x}}^2 \Phi_1) dV \tag{I.72}$$

die **zweite Greensche Integralformel**.

Die Greenschen Integralformeln verbinden somit skalare Felder und deren Normalenableitungen auf einer geschlossenen Fläche S mit deren Funktionswerten im umschlossenen Gebiet V. Dies ist sehr brauchbar für die Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen, wobei Größen und deren Ableitungen auf einer Fläche (=Rand) vorgegeben sind und deren Werte im Inneren gesucht sind.

5 Differentialoperatoren in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

5.1 Krummlinige orthogonale Koordinaten



Statt in einem kartesischen Koordinatensystem zu arbeiten, ist es oft zweckmäßig, gekrümmte Koordinaten einzuführen. Die wichtigsten sind Zylinder- und Kugelkoordinaten. Sie sind zweckmäßig bei Problemen entsprechender Symmetrie.

Als Bezeichnungen wollen wir x_1, x_2, x_3 für die kartesischen Koordinaten beibehalten. Die dazugehörigen Basisvektoren sind $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$. Die krummlinigen Koordinaten werden allgemein mit ξ^1, ξ^2, ξ^3 bezeichnet. Die dazugehörigen Basisvektoren sind $\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2, \tilde{\underline{e}}_3$. Im Unterschied zu den $\underline{e}_i$ sind die $\tilde{\underline{e}}_i$ im Raum nicht mehr konstant; sie sind aber in jedem Punkt des Raumes orthonormiert und bilden ein Rechtssystem.

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} &\tilde{\underline{e}}_i \cdot \tilde{\underline{e}}_j = \delta_{ij} \quad i,j = 1,2,3 \\ &\tilde{\underline{e}}_1 \times \tilde{\underline{e}}_2 = \tilde{\underline{e}}_3 \quad , \quad \tilde{\underline{e}}_2 \times \tilde{\underline{e}}_3 = \tilde{\underline{e}}_1 \quad , \quad \tilde{\underline{e}}_3 \times \tilde{\underline{e}}_1 = \tilde{\underline{e}}_2 \end{aligned} \tag{I.73}$$

Das Differential des Ortsvektors $\underline{r}$ geht von

$$d\underline{r} = dx_1\underline{e}_1 + dx_2\underline{e}_2 + dx_3\underline{e}_3$$

in

$$d\underline{r} = h_1 d\xi^1\tilde{\underline{e}}_1 + h_2 d\xi^2\tilde{\underline{e}}_2 + h_3 d\xi^3\tilde{\underline{e}}_3 \tag{I.74}$$

über. Die Koeffizienten $h_i(\underline{\xi})$ sind Funktionen des Ortes und tragen der Nicht-Konstanz der $\tilde{\underline{e}}_i$ im Raum Rechnung. Das Linienelement ds ergibt sich dann aus

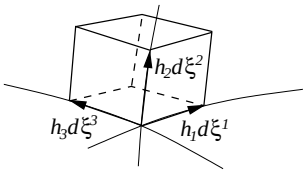
$$ds^2 = d\underline{r}\cdot d\underline{r} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = h_1^2\left(d\xi^1\right)^2 + h_2^2\left(d\xi^2\right)^2 + h_3^2\left(d\xi^3\right)^2 \quad . \tag{I.75}$$

Das vektorielle Flächenelement berechnet sich zu

$$\begin{aligned} d\underline{S} &= h_2h_3 d\xi^2 d\xi^3\tilde{\underline{e}}_1 + h_3h_1 d\xi^3 d\xi^1\tilde{\underline{e}}_2 + h_1h_2 d\xi^1 d\xi^2\tilde{\underline{e}}_3 \\ \text{bzw.}\quad d\underline{S} &= \left(h_2h_3 d\xi^2 d\xi^3, h_3h_1 d\xi^3 d\xi^1, h_1h_2 d\xi^1 d\xi^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{I.76}$$

Das Volumenelement folgt schließlich zu

$$dV = h_1h_2h_3 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad . \tag{I.77}$$

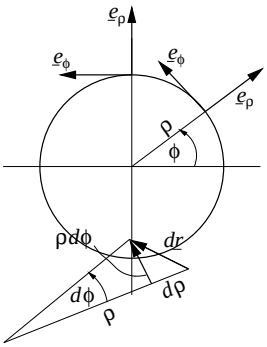


Wir ermitteln nun die h_i's für die wichtigen Fälle von Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Vorab betrachten wir ebene Polarkoordinaten mit $\xi^1 = \rho$, $\xi^2 = \varphi$, $\tilde{\underline{e}}_1 = \underline{e}_\rho$ und $\tilde{\underline{e}}_2 = \underline{e}_\varphi$.

Der Ortsvektor ist hier

$$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho \quad . \tag{I.78}$$



Für dessen Differential folgt

$$d\underline{r} = d\rho\underline{e}_\rho + \rho d\underline{e}_\rho \tag{I.79}$$

Aus der Skizze liest man ab

$$d\underline{r} = d\rho\underline{e}_\rho + \rho d\varphi\underline{e}_\varphi \quad , \tag{I.80}$$

woraus offensichtlich $d\underline{e}_\rho = d\varphi\underline{e}_\varphi$ folgt. Das ebene Linienelement ergibt sich unmittelbar zu

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad , \tag{I.81}$$

woraus abzulesen ist, daß

$$h_1 = 1 \quad \text{und} \quad h_2 = \rho \quad . \tag{I.82}$$

Die Erweiterung zu Zylinderkoordinaten ist trivial. Wir benennen $\xi^3 = z$, $\tilde{\underline{e}}_3 = \underline{e}_z$. Der Ortsvektor ist jetzt

$$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z \tag{I.83}$$

und dessen Differential

$$d\underline{r} = d\rho\underline{e}_\rho + \rho d\varphi\underline{e}_\varphi + dz\underline{e}_z \quad . \tag{I.84}$$

$\underline{e}_z$ ist konstant. Damit folgt

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{I.85}$$

und wir lesen ab

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = \rho \quad , \quad h_3 = 1 \quad . \tag{I.86}$$

So ergibt sich z.B. $dV = \rho\, d\rho d\varphi dz$.

In Kugelkoordinaten führen wir ein

$$\begin{aligned} \xi^1 = r \quad , \quad \xi^2 = \theta \quad , \quad \xi^3 = \varphi \\ \underline{\tilde{e}}_1 = \underline{e}_r \quad , \quad \underline{\tilde{e}}_2 = \underline{e}_\theta \quad , \quad \underline{\tilde{e}}_3 = \underline{e}_\varphi \quad . \end{aligned} \tag{I.87}$$

Für den Ortsvektor gilt

$$\underline{r} = r\underline{e}_r \quad . \tag{I.88}$$

Dessen Differential ist nun

$$d\underline{r} = dr\underline{e}_r + rd\theta\underline{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\underline{e}_\varphi \quad . \tag{I.89}$$

Es folgt

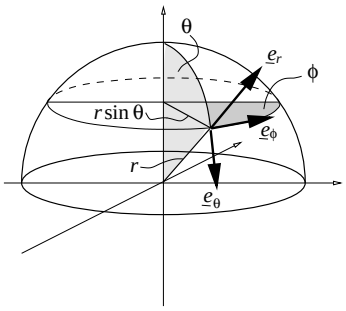
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{I.90}$$

und damit

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = r\sin\theta \quad . \tag{I.91}$$

Hier erhält man für das Volumenelement

$$dV = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \quad . \tag{I.92}$$



Zur Vervollständigung geben wir noch die Umrechnungen in kartesische Koordinaten an.

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\varphi \\ x_2 &= \rho\sin\varphi \\ x_3 &= z \end{aligned} \tag{I.93}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{I.94}$$

5.2 Differentialoperatoren

Für krummlinige Koordinaten haben wir Linien-, Flächen und Volumenelement angegeben. Zusammen mit den Koordinatenunabhängigen Darstellungen reicht dies aus, um die Vektoroperationen auszurechnen.

Gradient

Aus seiner Definition folgt in Basisrichtung

$$(\partial_{\underline{x}})_i\Phi = \lim_{\Delta\xi_i\to 0}\frac{\Phi(\xi_i + h_i\Delta\xi^i) - \Phi(\xi_i)}{h_i\Delta\xi_i} = \frac{1}{h_i}\partial_{\xi_i}\Phi \quad . \tag{I.95}$$

Divergenz

Wir benutzen

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_S \underline{A}\cdot d\underline{S} \tag{I.96}$$

und betrachten den Fluß $\underline{A}\cdot d\underline{S}$ durch die gegenüberliegenden Flächen $d\xi^2 d\xi^3$ bei ξ^1 und $\xi^1+d\xi^1$ unter Beachtung von Gl.(I.76):

$$-(A_1h_2h_3)(\xi^1)d\xi^2d\xi^3+(A_1h_2h_3)(\xi^1+d\xi^1)d\xi^2d\xi^3=+\partial_{\xi^1}(A_1h_2h_3)d\xi^1d\xi^2d\xi^3 \quad . \tag{I.97}$$

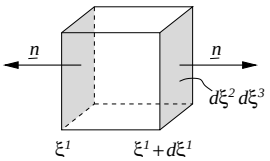
Desgleichen für die Koordinatenrichtungen ξ^2 und ξ^3. Summation der drei Terme und Division durch das Volumen $h_2h_3h_3d\xi^1d\xi^2d\xi^3$ (Gl.(I.77)) führt auf

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\partial_{\xi^1}(A_1h_2h_3)+\partial_{\xi^2}(A_1h_1h_3)+\partial_{\xi^3}(A_1h_1h_2)\right) \quad . \tag{I.98}$$

Rotation

Wir gehen aus von

$$(\partial_{\underline{x}}\times\underline{A})_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_K\underline{A}\cdot d\underline{x} \quad . \tag{I.99}$$

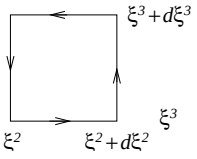


Für die Komponente in Richtung von ξ^1 ist $\Delta S=h_2h_3d\xi^2d\xi^3$ und es folgt

$$(\partial_{\underline{x}}\times\underline{A})_1=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{h_2h_3d\xi^2d\xi^3}\oint(A_2h_2d\xi^2+A_3h_3d\xi^3)$$

Das Kurvenintegral ergibt

$$\begin{aligned}\oint(A_2h_2d\xi^2)+(A_3h_3d\xi^3)&=\left[(A_2h_2)(\xi^3)-(A_2h_2)(\xi^3+d\xi^3)\right]d\xi^2+\\&\quad\left[(A_3h_3)(\xi^2+d\xi^2)-(A_3h_3)(\xi^2)\right]d\xi^3\\&=-\partial_{\xi^3}(A_2h_2)d\xi^3d\xi^2+\partial_{\xi^2}(A_3h_3)d\xi^2d\xi^3 \quad .\end{aligned} \tag{I.100}$$



Folglich gilt

$$(\partial_{\underline{x}}\times\underline{A})_1=\frac{1}{h_2h_3}\left(\partial_{\xi^2}(A_3h_3)-\partial_{\xi^3}(A_2h_2)\right) \quad . \tag{I.101}$$

Die weiteren Komponenten folgen durch zyklische Vertauschung.

Laplace-Operator

Nacheinanderausführung von $\partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}$ liefert

$$\partial^2_{\underline{x}}\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\partial_{\xi^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\partial_{\xi^1}\Phi\right)+\partial_{\xi^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\partial_{\xi^2}\Phi\right)+\partial_{\xi^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\partial_{\xi^3}\Phi\right)\right) \tag{I.102}$$

Wir merken noch an, daß diese Betrachtungen die Komponenten der Vektoroperationen in dem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem liefern, als Funktion dieser neuen Koordinaten ξ_i. Die kartesischen Koordinaten ausgedrückt durch ξ_i sehen anders aus und sind getrennt zu berechnen. Es ist nun trivial, die Differentialoperatoren in speziellen Koordinaten auszurechnen. Wir geben die Resultate an.

Zylinderkoordinaten

$$\xi^1=\rho,\ \xi^2=\varphi,\ \xi^3=z \qquad \underline{\tilde{e}}_1=\underline{e}_\rho,\ \underline{\tilde{e}}_2=\underline{e}_\varphi,\ \underline{\tilde{e}}_3=\underline{e}_z \qquad h_1=1,\ h_2=\rho,\ h_3=1$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}\Phi &= \left(\partial_\rho\Phi, \frac{1}{\rho}\partial_\varphi\Phi, \partial_z\Phi\right) \\
\partial_{\underline{x}}\underline{A} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_\varphi + \partial_z A_z \\
\partial_{\underline{x}}\times\underline{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi, \partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z, \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_\varphi\right) \\
\partial^2_{\underline{x}}\Phi &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\Phi) + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_\varphi\Phi + \partial^2_z\Phi
\end{aligned}
\tag{I.103}
$$

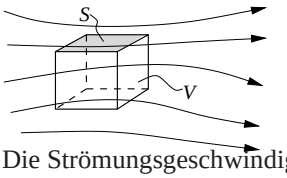
Kugelkoordinaten

$$\xi^1 = r, \xi^2 = \theta, \xi^3 = \varphi \qquad \tilde{\underline{e}}_1 = \underline{e}_r, \tilde{\underline{e}}_2 = \underline{e}_\theta, \tilde{\underline{e}}_3 = \underline{e}_\varphi \qquad h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}\Phi &= \left(\partial_r\Phi, \frac{1}{r}\partial_\theta\Phi, \frac{1}{r\sin\theta}\partial\varphi\Phi\right) \\
\partial_{\underline{x}}\underline{A} &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A_\varphi \\
\partial_{\underline{x}}\times\underline{A} &= \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left[\partial_\theta\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \partial_\varphi A_\theta\right], \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A_r - \frac{1}{r}\partial_r(rA_\varphi), \frac{1}{r}\partial_r(rA_\theta) - \frac{1}{r}\partial_\theta A_r\right) \\
\partial^2_{\underline{x}}\Phi &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_\varphi\Phi
\end{aligned}
\tag{I.104}
$$

6 Allgemeine Zusammenhänge zwischen Feldern

6.1 Kontinuitätsgleichung



Wir betrachten eine Strömung. Durch diese wird eine physikalische Eigenschaft transportiert, deren Dichte $\rho(\underline{x},t)$ ist. Das kann eine Massen-, Teilchen-, Ladungs-, Energiedichte sein oder auch eine vektorielle Dichte wie die Impulsdichte.

Die Strömungsgeschwindigkeit ist $\underline{v}(\underline{x},t)$. Dann ist über die Bildung von

$$\underline{j}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\cdot\underline{v}(\underline{x},t) \tag{I.105}$$

der Dichte ρ eine Stromdichte $\underline{j}$ zugeordnet. Das Flächenintegral über $\underline{j}$ ergibt gerade den Fluß

$$\Psi = \iint\limits_S \underline{j}\cdot d\underline{S} \quad . \tag{I.106}$$

Darüberhinaus definieren wir noch den integralen Fluß Ψ_I durch

$$\frac{d\Psi_I}{dt} = \Psi \quad . \tag{I.107}$$

Der in der Zeit dt durch eine Fläche S ausströmende integrale Fluß ist

$$d\Psi_I = \iint\limits_S \underline{j}\cdot d\underline{S}dt = \iiint\limits_V \partial_{\underline{x}}\underline{j}\,dVdt = \iiint\limits_V \partial_{\underline{x}}(\rho\underline{v})dVdt \quad . \tag{I.108}$$

Der durch das Ausströmen auftretende Verlust an Menge ist andererseits

$$d\Psi_I = -\iiint\limits_V \partial_t\rho\,dVdt \quad , \tag{I.109}$$

wobei $\partial_t \rho$ die lokale Änderung der Dichte ist. Wenn keine Vernichtung oder Erzeugung von ρ stattfindet, müssen beide Ausdrücke gleich sein, und zwar für jedes Volumen und jedes Zeitintervall. Dies erfordert

$$\partial_{\underline{x}}(\rho \underline{v}) + \partial_t \rho = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial_{\underline{x}} \underline{j} + \partial_t \rho = 0 \quad . \tag{I.110}$$

Dies ist die ***Kontinuitätsgleichung***. Folgende andere Darstellungen sind möglich:

$$\begin{aligned} \rho \partial_{\underline{x}} \underline{v} + \underline{v} \cdot \partial_{\underline{x}} \rho + \partial_t \rho = 0 \quad , \\ \rho \partial_{\underline{x}} \underline{v} + d_t \rho = 0 \quad . \end{aligned} \tag{I.111}$$

6.2 Darstellung von stationären Feldern durch Quellen und Wirbel

Besitzt ein Feld $\underline{F}_1(\underline{x})$ Quellen, so gilt

$$\partial_{\underline{x}} \underline{F}_1 \neq 0 \quad . \tag{I.112}$$

Die dem Feld $\underline{F}_1$ zugeordnete Quellendichte sei $\rho(\underline{x})$. Dann gilt

$$\partial_{\underline{x}} \underline{F}_1 = \rho \quad . \tag{I.113}$$

Ein Feld $\underline{F}_2(\underline{x})$ sei nicht wirbelfrei, also

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F}_2 \neq 0 \quad . \tag{I.114}$$

Die zugeordnete Wirbelstärke (Quellstromdichte) sei $\underline{j}(\underline{x})$ und es gilt

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{F}_2 = \underline{j} \quad . \tag{I.115}$$

Divergenzbildung ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \underline{j} = 0 \quad . \tag{I.116}$$

Sind ρ und $\underline{j}$ unabhängig, so sind es auch $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$. Wir wollen ein wirbel- und ein quellenfreies Feld aus ihren Quellen und Stromdichten bestimmen. Für die Felder $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ gelte

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \underline{F}_1 = 0 \qquad & \partial_{\underline{x}} \underline{F}_2 = 0 \\ \partial_{\underline{x}} \underline{F}_1 = \rho \qquad & \partial_{\underline{x}} \times \underline{F}_2 = \underline{j} \quad . \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um lineare partielle Dgln. für $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$, die nun gelöst werden sollen. Die ersten beiden Gleichungen lassen sich durch

$$\underline{F}_1 = -\partial_{\underline{x}} \Phi' \quad , \quad \underline{F}_2 = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}' \tag{I.117}$$

befriedigen, d.h. die Bestimmung von $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ ist auf die Bestimmung von Φ' und $\underline{A}'$ zurückgeführt. Φ' heißt das skalare Potential des Feldes $\underline{F}_1$ und $\underline{A}'$ das Vektorpotential von $\underline{F}_2$. Einsetzen in die beiden verbleibenden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \Phi' = \partial_{\underline{x}}^2 \Phi' = -\rho \quad , \\ \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}' = \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \underline{A}' - \partial_{\underline{x}}^2 \underline{A}' = \underline{j} \quad . \end{aligned} \tag{I.118}$$

Die Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt. Offenbar ändern sich die Felder $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ und damit auch der primäre Zusammenhang zwischen Quellen und Feldern nicht, wenn die Potentiale einer sogenannten „Eichtransformation“

$$\Phi = \Phi' + C \quad , \quad \underline{A} = \underline{A}' + \partial_{\underline{x}} \chi(\underline{x}) \tag{I.119}$$

unterworfen werden. Für $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ ist es unerheblich, ob Φ und $\underline{A}$ oder Φ' und $\underline{A}'$ verwendet werden. C ist eine beliebige räumliche Konstante. $\chi(\underline{x})$ ist eine beliebige Funktion von $\underline{x}$. Mit ihrer Hilfe ist es z.B. immer möglich, das Vektorpotential so zu eichen, daß $\partial_{\underline{x}} \underline{A} = 0$ wird (Coulombeichung). Dann gilt

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\rho \quad , \quad \partial_{\underline{x}}^2 \underline{A} = -\underline{j} \quad . \tag{I.120}$$

Dies sind Poisson-Gleichungen für die Potentiale, die das Problem im stationären Fall vollständig beschreiben. Die (inhomogenen) Lösungen lauten

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{x}) &= \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \quad , \\ \underline{A}(\underline{x}) &= \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \quad .\end{aligned} \tag{I.121}$$

Die Lösung im Aufpunkt $\underline{x}$ ergibt sich als Volumenintegral über die Quellstärken in allen Quellpunkten $\underline{x}'$ dividiert durch den jeweiligen Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt.

Bevor wir den Beweis für diese Formeln antreten, prüfen wir die Eichbedingung $\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0$. Es folgt

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = \frac{1}{4\pi}\iiint dV'\,\partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{I.122}$$

Da der Divergenzoperator $\partial_{\underline{x}}$ nur auf die Aufpunkte $\underline{x}$ nicht aber auf die Quellpunkte $\underline{x}'$ wirkt, läßt sich (I.122) umformen zu

$$\partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \underline{j}(\underline{x}')\partial_{\underline{x}}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\underline{j}(\underline{x}')\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \quad . \tag{I.123}$$

Wir führen nun die Operatoren $\partial'_{\underline{x}}$ und $\partial'_{\underline{x}}$ ein, die gerade auf die Quellpunkte $\underline{x}'$ wirken und nicht auf die Aufpunkte $\underline{x}$ und erhalten

$$\underline{j}(\underline{x}')\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} = \underline{j}(\underline{x}')\partial'_{\underline{x}}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \partial'_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{\partial'_{\underline{x}}\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{I.124}$$

Da aber im stationären Fall $\partial'_{\underline{x}}\underline{j}(\underline{x}') = 0$ gilt, erhalten wir durch Vergleich mit (I.123)

$$\partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\partial'_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \tag{I.125}$$

und damit

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V dV'\,\partial'_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\frac{1}{4\pi}\iint_S d\underline{S}'\,\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{I.126}$$

Wir nehmen inselartige Quellstromdichten an und erstrecken die Oberfläche jenseits dieser Inseln, so daß das Oberflächenintegral verschwindet. Im Extremfall kann die Oberfläche S des Volumens V ins Unendliche verlagert werden, wo natürlich auch keine Ströme fließen. Damit verschwindet die rechte Seite und $\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0$ ist erfüllt, q.e.d.

Wir kommen nun zum Beweis der Lösungsformeln (I.121). Ausgangspunkt ist die zweite Greensche Integralformel (Gl.(I.72))

$$\iint_S (\Phi_1\partial_n\Phi_2 - \Phi_2\partial_n\Phi_1)dS = \iiint_V (\Phi_1\partial^2_{\underline{x}'}\Phi_2 - \Phi_2\partial^2_{\underline{x}'}\Phi_1)dV' \quad , \tag{I.127}$$

die für folgende Situation angepaßt wird:

$$\Phi_1 = \frac{1}{r} \quad , \quad \Phi_2 = \Phi \quad , \quad r = |\underline{x}-\underline{x}'| \quad .$$

V ist zunächst eine Hohlkugel mit dem Innenradius R_i und dem Außenradius R_a. R_i werden wir später gegen 0 und R_a gegen ∞ gehen lassen. Die Dichte ρ sei inselartig, und möge bei ∞ verschwinden. Die Oberfläche

ist entsprechend $S = S_i \cup S_a$. Das Zentrum der Hohlkugel ist der Aufpunkt $\underline{x}$, in dem das Potential zu berechnen ist. $\underline{x}'$ ist ein beliebiger Quellpunkt der Dichte $\rho(\underline{x}')$. Dann gilt

$$\iint_S \left(\frac{1}{r}\partial_n\Phi - \Phi\partial_n\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS = \iiint_V \left(\frac{1}{r}\partial^2_{\underline{x}'}\Phi - \Phi\partial^2_{\underline{x}'}\frac{1}{r}\right) dV' \quad . \tag{I.128}$$

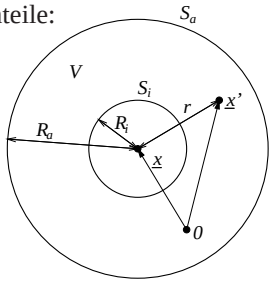
Weiterhin ist

$$\partial_n\Phi\Big|_{R_i} = -\partial_r\Phi\Big|_{R_i} \quad , \quad \partial_n\frac{1}{r}\Big|_{R_i} = -\partial_r\frac{1}{r}\Big|_{R_i} = \frac{1}{R_i^2} \quad . \tag{I.129}$$

Der Grenzübergang $R_a \to \infty$ führt zum Verschwinden des entsprechenden Anteils des Oberflächenintegrals (da ρ inselartig) und es folgt

$$\iint_{S_i} \left(-\frac{1}{R_i}\partial_r\Phi\Big|_{R_i} - \Phi(R_i)\frac{1}{R_i^2}\right) dS = \iiint_V \frac{1}{r}\partial^2_{\underline{x}'}\Phi dV' - \iiint_V \Phi\partial^2_{\underline{x}'}\frac{1}{r}dV' \quad . \tag{I.130}$$

Nun ist der Grenzübergang $R_i \to 0$ auszuführen. Die Terme ergeben folgende Anteile:



$$\iint_S \frac{1}{R_i}\partial_r\Phi\Big|_{R_i} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{R_i}\partial_r\Phi\Big|_{R_i} R_i^2 \sin\theta d\theta d\varphi \xrightarrow[R_i\to 0]{} 0 \quad , \tag{I.131}$$

solange $\partial_r\Phi\big|_{R_i}$ endlich bleibt.

$$\iint_S \Phi(R_i)\frac{1}{R_i^2}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(R_i)\frac{1}{R_i^2}R_i^2\sin\theta\, d\theta d\varphi \xrightarrow[R_i\to 0]{} 4\pi\Phi(\underline{x}) \tag{I.132}$$

$$\iiint \frac{1}{r}\partial^2_{\underline{x}'}\Phi dV' = -\iiint \frac{\rho(\underline{x}')}{r}dV' \quad , \tag{I.133}$$

wobei die Ausgangsgleichung $\partial^2_{\underline{x}}\Phi = -\rho$ benutzt wurde.

$$\iiint \Phi\partial^2_{\underline{x}'}\left(\frac{1}{r}\right)dV' = 0 \quad \text{, da} \quad \partial^2_{\underline{x}'}\left(\frac{1}{r}\right) \equiv 0 \quad . \tag{I.134}$$

Die nichtverschwindenden Anteile ergeben zusammen

$$-4\pi\Phi(\underline{x}) = -\iiint \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \qquad \text{, q.e.d.} \tag{I.135}$$

Für das Vektorpotential gilt wegen der komponentenweisen Formäquivalenz analoges.

Aus den Potentialen können nun noch die Felder bestimmt werden zu

$$\begin{aligned}
\underline{F}_1(\underline{x}) &= -\partial_{\underline{x}}\iiint \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\rho(\underline{x}')(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}dV' \quad , \\
\underline{F}_2(\underline{x}) &= \partial_{\underline{x}}\times\iiint \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\underline{j}(\underline{x}')\times(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}dV' \quad .
\end{aligned} \tag{I.136}$$

Im stationären Fall sind damit die Felder durch Quellen und Ströme (Wirbel) bestimmt.

Hauptsatz der Vektoranalysis (Helmholtz-Theorem)

Bisher haben wir zwei getrennte Probleme betrachtet: Zum einen das wirbelfreie Feld $\underline{F}_1(\underline{x})$ und seine Quellen $\rho(\underline{x})$ und zum anderen das quellenfreie Feld $\underline{F}_2(\underline{x})$ und seine Wirbel $\underline{j}(\underline{x})$. Wir betrachten nun das Summenfeld $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$. Dann ist klar, daß $\underline{F}$ aus einem quellen- und einem wirbelfreien Anteil besteht und es gilt

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \underline{F} &= \partial_{\underline{x}} \underline{F}_1 = \rho \quad , \\ \partial_{\underline{x}} \times \underline{F} &= \partial_{\underline{x}} \times \underline{F}_2 = \underline{j} \quad . \end{aligned} \tag{I.137}$$

Wir fragen nun umgekehrt: Zu lösen ist das System

$$\partial_{\underline{x}} \underline{F} = \rho \quad , \quad \partial_{\underline{x}} \times \underline{F} = \underline{j} \quad .$$

Eine Lösung für $\underline{F}$ ist dann offensichtlich die Summe aus $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$, also

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\underline{x}')(\underline{x} - \underline{x}') + \underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \, dV' \tag{I.138}$$

Ist diese Lösung aber die einzige?

Die Antwort liefert der ***Hauptsatz der Vektoranalysis***:

Das Problem besteht aus den Dgln.

$$\partial_{\underline{x}} \underline{F} = \rho \quad \text{und} \quad \partial_{\underline{x}} \times \underline{F} = \underline{j} \quad \text{auf } V \tag{I.139}$$

und der Randbedingung

$$F_n := \underline{F} \cdot \underline{n} = g(\underline{x}) \qquad \text{auf } S \qquad (S \text{ ist Rand von } V, \underline{n} \text{ ist äußerer Normalenvektor}) \tag{I.140}$$

ist eindeutig lösbar, wenn

$$V \subset \mathscr{R}^3 \text{ beschränkt und einfach zusammenhängend mit glattem Rand } S$$

ist.

Beweis:
Annahme zweier Lösungen $\underline{F}$ und $\widetilde{\underline{F}}$ des Randwertproblems. Dann erfüllt

$$\delta \underline{F} := \underline{F} - \widetilde{\underline{F}}$$

das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \delta \underline{F} &= \partial_{\underline{x}} \underline{F} - \partial_{\underline{x}} \widetilde{\underline{F}} = \rho - \rho = 0 \qquad \text{auf } V \\ \partial_{\underline{x}} \times \delta \underline{F} &= \partial_{\underline{x}} \times \underline{F} - \partial_{\underline{x}} \times \widetilde{\underline{F}} = \underline{j} - \underline{j} = 0 \qquad \text{auf } V \\ \delta F_n &:= (\underline{F} - \widetilde{\underline{F}}) \cdot \underline{n} = g - g = 0 \qquad \text{auf } S \quad . \end{aligned}$$

Wegen

$$\partial_{\underline{x}} \times \delta \underline{F} = 0$$

kann

$$\delta \underline{F} = -\partial_{\underline{x}} \psi \qquad , \qquad \psi \text{ beliebige Funktion}$$

gesetzt werden. Wegen

$$\partial_{\underline{x}} \delta \underline{F} = 0$$

folgt

$$\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \psi = \partial_{\underline{x}}^2 \psi = 0 \quad .$$

Die erste Greensche Integralformel

$$\int_V \phi\, \partial_{\underline{x}}^2 \psi\, dV + \int_V \partial_{\underline{x}}\phi\, \partial_{\underline{x}}\psi\, dV = \oint_S \phi\, \partial_{\underline{x}}\psi\, d\underline{S} \tag{I.141}$$

liefert mit $\phi = \psi$ und $\partial_{\underline{x}}^2 \psi = 0$

$$\begin{aligned} \int_V (\partial_{\underline{x}}\psi)^2\, dV &= \oint_S \psi\, \partial_{\underline{x}}\psi\, d\underline{S} \\ \int_V (\delta\underline{F})^2\, dV &= -\oint_S \psi\, \delta\underline{F}\, d\underline{S} \\ &= -\oint_S \psi\, \delta\underline{F}\cdot\underline{n}\, dS \\ &= -\oint_S \psi\, \delta F_n\, dS \qquad . \end{aligned} \tag{I.142}$$

Da $\delta F_n = 0$ auf S folgt

$$\int_V (\delta\underline{F})^2\, dV = 0 \qquad . \tag{I.143}$$

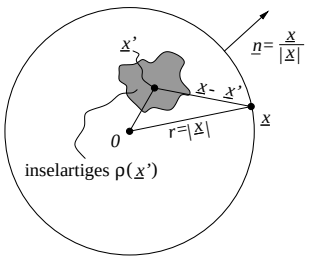
Der Integrand kann nicht negativ werden, somit folgt

$$\delta\underline{F} = 0. \qquad \text{q.e.d.} \tag{I.144}$$

Bemerkung:
Die Randbedingung (I.142) wird durch die Lösungsformel (I.140) i.d.R. nicht erfüllt. Sie repräsentiert nur die inhomogene Lösung, es kommt noch die allgemeine homogene Lösung hinzu, die wir nicht aufgeschrieben haben. Der homogene Loesungsteil ist gerade so zu wählen, dass die Randbedingung erfüllt ist. Da in der Physik häufig der Rand ins Unendliche verschoben wird, was anschliessend diskutiert wird, beschäftigen wir uns hier nicht näher mit dem Randwertproblem.

Für **inselartige** Quellen $\rho(\underline{x})$ ist der Satz auf unbegrenzte V ausdehnbar. Dazu betrachten wir $V = \lim_{r\to\infty} K$, wobei K eine Kugel vom Radius r ist. Mit Q bezeichnen wir die Gesamtquellstärke im Raum, also

$$Q = \lim_{r\to\infty} \int_K \rho\, dV \qquad . \tag{I.145}$$



Dann folgt

$$Q = \lim_{r\to\infty} \int_V \partial_{\underline{x}}\underline{F}\, dV = \lim_{r\to\infty} \int_S g\, dS = \lim_{r\to\infty} 4\pi g(r)\cdot r^2 \tag{I.146}$$

bzw.

$$\lim_{r\to\infty} F_n = \lim_{r\to\infty} g = \lim_{r\to\infty} \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad . \tag{I.147}$$

Es ist also zu fordern, daß F_n hinreichend schnell ins Unendliche hin abfällt, nämlich

$$F_n \propto \frac{1}{r^2} \qquad \text{für} \qquad r\to\infty \qquad . \tag{I.148}$$

Zu prüfen ist, ob diese Forderung mit der bekannten inhomogenen Lösungsformel

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\underline{x}')(\underline{x}-\underline{x}') + \underline{j}(\underline{x}')\times(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\, dV'$$

konsistent ist. Nun gilt

$$\lim_{r\to\infty}\int \frac{\rho(\underline{x}')(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\,dV' = \int \rho(\underline{x}')\,dV'\,\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} = \frac{Q}{r^2}\underline{n}$$

sowie (I.149)

$$\lim_{r\to\infty}\int \frac{\underline{j}(\underline{x}')\times(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\,dV' = \int \underline{j}(\underline{x}')\times\underline{n}\,dV'\,\frac{1}{r^2} \quad .$$

Skalare Multiplikation mit $\underline{n}$ eliminiert $\underline{j}\times\underline{n}$ und es verbleibt der Nachwies der geforderten Konsistenz

$$\lim_{r\to\infty} F_n = \lim_{r\to\infty}\underline{F}\,\underline{n} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} \quad . \tag{I.150}$$

Die Lösungsformel für $\underline{F}$ ist also auch auf unbegrenzte Gebiete anwendbar, wenn die Quellen inselartig sind.

6.3 Feldgleichungen im zeitabhängigen Fall

Die Quellen $\rho(\underline{x})$ und Wirbel $\underline{j}(\underline{x})$ seien nicht unabhängig und auch nicht stationär, sondern durch die Kontinuitätsgleichung (I.110) verbunden. Somit ist i.a. $\partial_{\underline{x}}\underline{j} \neq 0$ und damit auch $\underline{j} \neq \partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_2$. Diese letzte Gleichung muß einen Zusatz bekommen, der $\partial_{\underline{x}}\underline{j} = -\partial_t\rho$ kompensiert. Das wird durch $\partial_t\underline{F}_1$ geleistet, also

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_2 = \underline{j} + \partial_t\underline{F}_1 \quad . \tag{I.151}$$

Die Gleichung $\partial_{\underline{x}}\underline{F}_2 = 0$ bleibt dabei unverändert. Die im stationären Fall gültige Beziehung $\partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_1 = 0$ kann deshalb auch mit dem zusätzlichen Term $\partial_t\underline{F}_2$ versehen werden, also

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_1 = -\partial_t\underline{F}_2 \quad , \tag{I.152}$$

um die „Symmetrie“ wieder herzustellen. Die nichtstationär verallgemeinerten Gleichungen stellen wir jetzt nochmals zusammen:

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_1 = -\partial_t\underline{F}_2 \qquad \partial_{\underline{x}}\underline{F}_2 = 0 \tag{I.153}$$

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_2 = \underline{j} + \partial_t\underline{F}_1 \qquad \partial_{\underline{x}}\underline{F}_1 = \rho \quad . \tag{I.154}$$

Tatsächlich sind dies bereits die Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes im Vakuum. Die Quellen $\rho(\underline{x})$ sind die elektrischen Ladungen, die Wirbel $\underline{j}(\underline{x})$ die durch bewegte Ladungen hervorgerufenen Ströme. $\underline{F}_1 = \underline{E}$ ist das elektrische Feld; $\underline{F}_2 = \underline{B}$ ist die magnetische Induktion. Es ist zu beachten, daß hier ρ und $\underline{j}$ noch nicht physikalisch skaliert sind. Eine Erweiterung ist noch möglich, nämlich

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{F}_1 = -\partial_t\underline{F}_2 \qquad \partial_{\underline{x}}\underline{F}_2 = 0 \tag{I.155}$$

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{G}_2 = \underline{j} + \partial_t\underline{G}_1 \qquad \partial_{\underline{x}}\underline{G}_1 = \rho \quad . \tag{I.156}$$

Damit sind auch alle Forderungen erfüllt. Allerdings fehlt ein Zusammenhang zwischen den Feldern $\underline{F}$ und $\underline{G}$, der erst durch die Physik geliefert wird. Die vier Gleichungen sind die Maxwellschen Gleichungen für Felder in Medien. Es sind dann

$\underline{F}_1 = \underline{E}$	die elektrische Feldstärke,
$\underline{F}_2 = \underline{B}$	die magnetische Induktion,
$\underline{G}_1 = \underline{D}$	die dielektrische Verschiebung,
$\underline{G}_2 = \underline{H}$	die magnetische Feldstärke.

KAPITEL II

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN DER MAXWELL-THEORIE

1 Feldgleichungen

Im Kapitel „Vektoranalysis“ haben wir auf mathematischem Wege über allgemeine Strukturen und Zusammenhänge von Vektorfeldern an die Maxwell-Gleichungen herangeführt. In diesem Abschnitt werden die Maxwell-Gleichungen nun axiomatisch eingeführt, physikalisch interpretiert und Konklusionen abgeleitet.

In ruhenden Medien lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \partial_t \underline{D} + \underline{j} \tag{II.1}$$
$$\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \rho \tag{II.2}$$
$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \tag{II.3}$$
$$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0 \tag{II.4}$$

$\underline{E}$	elektrische Feldstärke
$\underline{B}$	magnetische Induktion
$\underline{D}$	dielektrische Verschiebung
$\underline{H}$	magnetische Feldstärke
$\underline{j}$	elektrische Stromdichte
ρ	elektrische Ladungsdichte

(II.1) und (II.2) bilden das inhomogene System; (II.3) und (II.4) das homogene System. ρ und $\underline{j}$ sind die Quellen (und Wirbel) des elektromagnetischen Feldes, die die Inhomogenitäten des Systems (II.1) und (II.2) bilden.

Die Stromdichte kann unterteilt werden in

$$\underline{j} = \underline{j}^{(cv)} + \underline{j}^{(cd)} \quad . \tag{II.5}$$

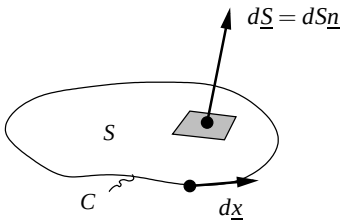
$\underline{j}^{(cd)}$ symbolisiert den konduktiven Strom (Leitungsstrom), während $\underline{j}^{(cv)} = \rho \underline{v}$ den konvektiven Strom (Ladungsstrom) darstellt.

Als Bezeichnungen werden auch verwendet:

- (II.1) Ampéresches Durchflutungsgesetz
- (II.2) Gaußsches Gesetz
- (II.3) Faradaysches Induktionsgesetz

- (II.4) ?

Integrale Form der Maxwell-Gleichungen



Auf (II.1) und (II.3) ist der Stokessche Satz anzuwenden. Dazu betrachten wir eine Fläche S im Raum, die von der Kontur C berandet wird. Es folgt

$$\text{aus (II.1)} \quad \Rightarrow \quad \int_S \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} \cdot d\underline{S} = \int_S \left(\partial_t \underline{D} + \underline{j}\right) \cdot d\underline{S}$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_C \underline{H} \cdot d\underline{x} = d_t \int_S \underline{D} \cdot d\underline{S} + J \quad . \qquad \text{(II.6)}$$

J ist der Gesamtstrom durch die Fläche S.

$$\text{aus (II.3)} \quad \Rightarrow \quad \int_S \partial_{\underline{x}} \times \underline{E} \cdot d\underline{S} = -\int_S \partial_t \underline{B} \cdot d\underline{S}$$

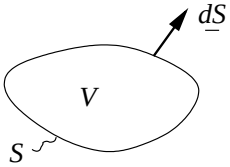
$$\Rightarrow \qquad \oint_C \underline{E} \cdot d\underline{x} = -d_t \int_S \underline{B} \cdot d\underline{S} = -d_t \Phi^m. \qquad \text{(II.7)}$$

Φ^m ist der magnetische Fluß durch S. Weiterhin werden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$\Phi^e = \int_S \underline{D} \cdot d\underline{S} \quad : \quad \text{elektrischer Fluß,}$$

$$V_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \underline{E} \cdot d\underline{x} \quad : \quad \text{elektrische Spannung,}$$

$$S_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} \underline{H} \cdot d\underline{x} \quad : \quad \text{magnetische Spannung.}$$



Auf (II.2) und (II.4) ist der Gaußsche Satz anzuwenden. Dazu betrachten wir ein Volumen V, daß von der geschlossenen Fläche S berandet wird. Es folgt

$$\text{aus (II.2)} \quad \Rightarrow \quad \int_V \partial_{\underline{x}} \underline{D} dV = \int_V \rho \, dV$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_S \underline{D} \cdot d\underline{S} = Q \quad . \qquad \text{(II.8)}$$

Q ist die Gesamtladung im Volumen V. Der elektrische Fluß durch die Oberfläche S ist gleich der eingeschlossenen Gesamtladung.

$$\text{aus (II.4)} \quad \Rightarrow \quad \int_V \partial_{\underline{x}} \underline{B} dV = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_S \underline{B} \cdot d\underline{S} = 0 \quad . \qquad \text{(II.9)}$$

Der magnetische Fluß durch eine geschlossene Fläche verschwindet. Es gibt keine magnetischen Monopole.

2 Materialgleichungen

Das einfachste „Material“ ist das **Vakuum**. Dort besteht ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen den elektrischen und magnetischen Größen jeweils untereinander:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} \tag{II.10}$$
$$\underline{H} = \kappa_0 \underline{B} \tag{II.11}$$

mit

$$\varepsilon_0 = 8,85418781762 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \tag{II.12}$$

(Elektrische Feldkonstante, Permittivität oder Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder Influenzkonstante)

$$\kappa_0 = \frac{1}{\mu_0} \quad , \quad \mu_0 = 1,2566370614 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \tag{II.13}$$

(Magnetische Feldkonstante, Permeabilität des Vakuums oder Induktionskonstante)

Es gilt $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, $c = 299792,458 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ (Vakuumlichtgeschwindigkeit).

Die resultierenden Maxwell-Gleichungen des Vakuums

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} + \mu_0 \underline{j} \tag{II.14}$$
$$\partial_{\underline{x}} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{II.15}$$
$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \tag{II.16}$$
$$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0 \tag{II.17}$$

liefern die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ in jedem Punkt des Raumes, sobald die Quellen ρ und $\underline{j}$ spezifiziert sind. Für eine kleine Anzahl definierter Quellen stellt die Bestimmung der Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ ein technisch lösbares Problem dar; praktisch unlösbar sind die Gleichungen für eine makroskopische Anzahl von Quellen.

In diesem Zusammenhang spielen zwei Aspekte eine Rolle. Der eine ist die immens große Zahl einzelner Quellen, nämlich die der geladenen Teilchen in der Hülle und im Kern eines Atoms oder die der Elektronen und Ionen in einem Plasma. Der andere ist die Tatsache, daß das detaillierte Verhalten der Felder auf atomaren Raumskalen für makroskopische Beobachtungen nicht von Bedeutung ist. Entscheidend ist dann der Mittelwert über ein Volumen, das groß ist im Vergleich zur atomaren Struktur. Solche gemittelten Größen werden makroskopische Felder bzw. Quellen genannt, für die bestimmte Materialgleichungen gelten. Ihre allgemeine Form ist

$$\underline{D} = \underline{D}(\underline{E}, \underline{B}) \tag{II.18}$$
$$\underline{H} = \underline{H}(\underline{E}, \underline{B}) \tag{II.19}$$

Für leitende Medien tritt noch das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$\underline{j} = \underline{j}(\underline{E}, \underline{B}) \tag{II.20}$$

hinzu. Die funktionale Abhängigkeit kann mitunter kompliziert sein, etwa nichtlinear oder von der Vorgeschichte abhängig (Hysterese-Effekt).

In vielen Materialien gilt jedoch ein linearer Zusammenhang (ruhende Medien, ohne Remanenz)

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E} \tag{II.21}$$

$$\underline{H} = \kappa_0 \underline{\underline{\kappa}}\, \underline{B} \tag{II.22}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ Permittivitätstensor

$\underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\mu}}^{-1}$ reziproker Permeabilitätstensor

$\underline{\underline{\mu}}$ Permeabilitätstensor

Analog gehorcht die konduktive Stromdichte in sehr vielen Fällen dem Gesetz (ruhendes Medium)

$$\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{E} \quad \text{mit dem Leitfähigkeitstensor } \underline{\underline{\sigma}}. \tag{II.23}$$

Für ein mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ bewegtes Medium gilt

$$\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad . \tag{II.24}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\mu}}$ und $\underline{\underline{\sigma}}$ drücken die lineare Reaktion des Mediums auf die Einwirkung der Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ aus.

Korrekt gilt dieser multiplikative Zusammenhang nur für die raum-zeitlichen Fourierkomponenten der jeweiligen Feldgrößen, z.B.

$$\underline{D}(\underline{k}, \omega) = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k}, \omega) \cdot \underline{E}(\underline{k}, \omega) \quad . \tag{II.25}$$

Für die untransformierten Feldkomponenten ist der Zusammenhang i.a. nichtlokal und nicht instantan, d.h. z.B.

$$\underline{D}(\underline{x}, t) = \varepsilon_0 \int_{V'} dV' \int_0^\infty dt' \, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}', t') \underline{E}(\underline{x} - \underline{x}', t - t') \quad . \tag{II.26}$$

Für $\underline{H}(\underline{x}, t)$ gilt analoges. $\underline{D}(\underline{x}, t)$ ist somit eine Faltung (Konvolution) aus $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$ und $\underline{E}(\underline{x}, t)$. Entsprechend einem mathematischen Satz ist die Fouriertransformierte einer Faltung gleich dem Produkt der jeweiligen Fouriertransformierten.

Im weiteren wollen wir die Beziehungen (II.21) und (II.22) als Standardsituation zugrunde legen.

3 Polarisation und Magnetisierung

Die Materialgleichungen (II.21) und (II.22) können umgeformt werden zu

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \quad , \tag{II.27}$$

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}}\, \underline{H} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) \tag{II.28}$$

Für die **elektrische Polarisation** $\underline{P}$ ergibt sich

$$\underline{P} = \varepsilon_0 (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{1}}) \underline{E} = \underline{\underline{\chi_e}}\, \underline{E} \quad . \tag{II.29}$$

Eingeführt wurde der Tensor der **elektrischen Suszeptibilität** $\underline{\underline{\chi_e}}$

$$\underline{\underline{\chi_e}} = \varepsilon_0 (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{1}}) \quad . \tag{II.30}$$

Für die Magnetisierung (=**magnetische Polarisation**) $\underline{M}$ gilt entsprechend

$$\underline{M} = (\underline{\underline{\mu}} - \underline{\underline{1}}) \underline{H} = \underline{\underline{\chi_m}}\, \underline{H} \quad . \tag{II.31}$$

Für die **magnetische Suszeptibilität** gilt

$$\underline{\underline{\chi_m}} = (\underline{\underline{\mu}} - \underline{\underline{1}}) \quad . \tag{II.32}$$

Im Vakuum gilt offensichtlich $\underline{P} = 0$, $\underline{M} = 0$.

4 Anisotropie und Inhomogenität

- **Anisotropie**: $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\mu}}$ und $\underline{\underline{\sigma}}$ sind Tensoren.
- **Isotropie**: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \cdot \underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{\mu}} = \mu \cdot \underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \cdot \underline{\underline{1}}$. ε, μ, σ sind Skalare.
- **Inhomogenität**: $\partial_{x_a} \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$, $\partial_{x_a} \underline{\underline{\mu}} \neq 0$, $\partial_{x_a} \underline{\underline{\sigma}} \neq 0$.
- **Homogenität**: $\partial_{x_a} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$, $\partial_{x_a} \underline{\underline{\mu}} = 0$, $\partial_{x_a} \underline{\underline{\sigma}} = 0$. x_a ist eine beliebige Komponente von $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
- **Vakuum**: Isotropie & Homogenität & $\varepsilon = 1$, $\mu = 1/\kappa = 1$, $\sigma = 0$. ε wird relative Permittivitätszahl genannt und $\mu =$ relative Permeabilitätszahl.

5 Bilanz der elektrischen Ladung

Die Diskussion der Ladung und des Stroms war für uns ein wichtiger Punkt, um im Kapitel I die Struktur der Maxwell-Gleichungen zu erschließen. Es ist somit nicht verwunderlich, daß diese eine Ladungsbilanz enthalten.

Ausgangsgleichung ist das Ampéresche Durchflutungsgesetz

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \partial_t \underline{D} + \underline{j} \quad . \tag{II.33}$$

Divergenzbildung ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \partial_t \partial_{\underline{x}} \underline{D} + \partial_{\underline{x}} \underline{j} = 0 \quad . \tag{II.34}$$

Einarbeiten von $\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \rho$ ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \partial_{\underline{x}} \underline{j} = 0 \quad . \tag{II.35}$$

Anwendung des Gaußschen Satzes überführt diese lokale Bilanz in eine globale:

$$d_t \int_V \rho \, dV + \int_V \partial_{\underline{x}} \underline{j} \, dV = d_t Q + \oint_S \underline{j} \cdot d\underline{S} = 0 \quad . \tag{II.36}$$

Die Gesamtladung im Volumen V

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

ändert sich zeitlich über die durch die Oberfläche S fließenden Ströme:

$$d_t Q = - \oint_S \underline{j} \cdot d\underline{S} \quad . \tag{II.37}$$

Die Ladung verringert sich bei nach außen abfließenden Strömen.

6 Weitere Bilanz - Gleichungen

6.1 Bilanz der elektromagnetischen Energie

Durchflutungs- und Induktionsgesetz werden in folgender Weise miteinander kombiniert:

$$\left.\begin{array}{c} \underline{E}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}=\underline{E}\cdot\partial_t\underline{D}+\underline{E}\cdot\underline{j} \\ \underline{H}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{E}=-\underline{H}\partial_t\underline{B} \end{array}\right\} \quad -$$

Das ergibt

$$\underbrace{\underline{E}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}-\underline{H}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{E}}_{=\partial_{\underline{x}}(\underline{H}\times\underline{E})}=\underline{E}\partial_t\underline{D}+\underline{H}\partial_t\underline{B}+\underline{E}\cdot\underline{j} \quad . \tag{II.38}$$

Die Größe

$$\underline{\Pi}=\underline{E}\times\underline{H}$$

heißt **Poynting-Vektor**. Sie hat den Charakter einer Energiestromdichte.

Folglich ergibt sich zunächst

$$\partial_{\underline{x}}\underline{\Pi}+\underline{E}\partial_t\underline{D}+\underline{H}\partial_t\underline{B}+\underline{E}\cdot\underline{j}=0 \quad . \tag{II.39}$$

Die weitere Umformung dieser Gleichung werden unter der Annahme unseres Standardmediums gemacht; außerdem seien die Materialtensoren zeitunabhängig und symmetrisch. Diese Annahmen sind in verlustfreien Medien erfüllt. Dann gilt

$$\underline{E}\partial_t\underline{D}=\varepsilon_0\underline{E}\cdot\partial_t(\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E})=\varepsilon_0\tfrac{1}{2}\partial_t(\underline{E}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E})=\tfrac{1}{2}\partial_t(\underline{E}\cdot\underline{D}) \quad , \tag{II.40}$$

$$\begin{aligned} \text{da}\quad \tfrac{1}{2}\partial_t(\underline{E}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E}) &= \tfrac{1}{2}(\partial_t\underline{E})\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E}+\tfrac{1}{2}\underline{E}\partial_t(\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E}) \\ &= \tfrac{1}{2}\underline{E}\partial_t(\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E})+\tfrac{1}{2}\underline{E}\partial_t(\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E}) \\ &= \underline{E}\partial_t(\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{E}) \quad , \end{aligned}$$

sowie

$$\underline{H}\partial_t\underline{B}=\frac{1}{2}\partial_t(\underline{H}\cdot\underline{B}) \quad . \tag{II.41}$$

Wir führen mittels

$$u=\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D}+\underline{H}\cdot\underline{B}) \tag{II.42}$$

die **elektromagnetische Energiedichte** ein und vermittels

$$L^{(\text{Joule})}=\underline{E}\cdot\underline{j} \tag{II.43}$$

die **Joulesche Verlustleistungsdichte**. Dann kann (II.39) zusammengefaßt werden zu

$$\partial_t u+\partial_{\underline{x}}\underline{\Pi}=-L^{(\text{Joule})} \qquad \text{(Poyntingscher Satz).} \tag{II.44}$$

Diese Beziehung beschreibt die lokale Energiebilanz. Daraus folgt die globale Energiebilanz durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf ein Volumen V:

$$d_t\int\limits_V u\,dV+\int\limits_V\partial_{\underline{x}}\underline{\Pi}\,dV=-\int\limits_V L^{(\text{Joule})}\,dV \quad .$$

Die Größe

$$U=\int\limits_V u\,dV$$

ist die elektromagnetische Gesamtenergie im Volumen V. Es folgt

$$d_t U + \oint_S \underline{\Pi} \cdot d\underline{S} = -\int_V L^{(\text{Joule})}\, dV \quad . \tag{II.45}$$

Die Gesamtenergie in V ändert sich durch den Energiefluß $\oint \underline{\Pi} \cdot d\underline{S}$ durch die Oberfläche S von V und durch die Jouleschen Verluste im Volumen V. Innerhalb der Jouleschen Verluste wird elektromagnetische Energie in eine andere Energieform (Teilchenenergie, Wärme etc.) umgewandelt.

In Medien, die nicht durch eine lineare Materialgleichung beschrieben werden, treten im Poyntingschen Satz Zusatzterme auf, z.B. aufgrund

- remanenter Magnetisierungen und Hysterese in ferromagnetischen Materialien
- nichtlinearer Polarisationen in nichtlinear-optischen Medien

Weitere Terme können auftreten durch Asymmetrien des Materials ($\underline{\underline{\varepsilon}} \neq \underline{\underline{\varepsilon}}^T$, $\underline{\underline{\mu}} \neq \underline{\underline{\mu}}^T$) und Zeitabhängigkeiten der Materialtensoren ($\partial_t \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$, $\partial_t \underline{\underline{\mu}} \neq 0$).

6.2 Bilanz des elektromagnetischen Impulses

Durchflutungs- und Induktionsgesetz werden in folgender Weise miteinander kombiniert:

$$\left.\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} \times \underline{B} &= \partial_t \underline{D} \times \underline{B} + \underline{j} \times \underline{B} \\ \underline{D} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{E} &= -\underline{D} \times \partial_t \underline{B} \end{aligned}\right\} \quad -$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \underline{D} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{E} - \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} \times \underline{B} &= -\underline{D} \times \partial_t \underline{B} - \partial_t \underline{D} \times \underline{B} - \underline{j} \times \underline{B} && \text{(II.46)} \\ &= -\partial_t (\underline{D} \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B}. && \text{(II.47)} \end{aligned}$$

Die Größe

$$\underline{p} := \underline{D} \times \underline{B}$$

heißt **elektromagnetische Impulsdichte**. Man verifiziert die aus der Mechanik bekannte Maßeinheit für eine Impulsdichte:

$$[\underline{p}] = [\underline{D}][\underline{B}] = [\varepsilon_0][\underline{E}][\underline{B}] = \frac{As}{Vm}\,\frac{V}{m}\,\frac{Vs}{m^2} = \frac{VAs^2}{m^4} = \frac{Nms}{m^4} = \frac{Ns}{m^3}. \tag{II.48}$$

Somit ergibt sich zunächst

$$\partial_t \underline{p} + \underline{D} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{E} - \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} \times \underline{B} = -\underline{j} \times \underline{B}. \tag{II.49}$$

Da mittlerweile die Struktur von Bilanzgleichungen schon gut vertraut ist, liegt es nahe nach Umformungen zu suchen, die die $\partial_{\underline{x}} \times$ enthaltenden Terme in eine Divergenz überführen. Um die Rechnung überschaubar zu halten, wollen wir nur recht einfache Materialgleichungen betrachten:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E} \quad , \quad \underline{H} = \kappa_0 \underline{\underline{\kappa}}\, \underline{B} \qquad \text{(lineare Medien)} \tag{II.50}$$

$$\text{mit} \qquad \partial_{x_a} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \quad , \quad \partial_{x_a} \underline{\underline{\kappa}} = 0 \qquad \text{(homogene Materialien)} \tag{II.51}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T \quad , \quad \underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\kappa}}^T \qquad \text{(symmetrische Materialtensoren)} \tag{II.52}$$

Dann folgt nach der unten angegebenen Nebenrechnung

$$\underline{D}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{E} = \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\underline{D}\underline{E}\,\delta_{ac} - D_cE_a) + E_a\,\partial_{\underline{x}}\underline{D} \tag{II.53}$$

$$-\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}\times\underline{B} = \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\underline{H}\underline{B}\,\delta_{ac} - H_aB_c) + H_a\,\partial_{\underline{x}}\underline{B} \qquad . \tag{II.54}$$

Die in diesem Term enthaltene Größe

$$\underline{\underline{\Sigma}} := \underline{E}\circ\underline{D} + \underline{H}\circ\underline{B} - \tfrac{1}{2}(\underline{E}\,\underline{D} + \underline{H}\,\underline{B})\underline{\underline{1}} = \underline{E}\circ\underline{D} + \underline{H}\circ\underline{B} - u\underline{\underline{1}} \tag{II.55}$$

in Komponentenschreibweise

$$\Sigma_{ab} = E_aD_b + H_aB_b - u\delta_{ab} \tag{II.56}$$

heißt **Maxwellscher Spannungstensor**. Für die Medien mit vorausgesetzten symmetrischen Materialtensoren ist der Spannungstensor ein symmetrischer Tensor:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T \qquad \text{bzw.} \qquad \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba} \tag{II.57}$$

Im Abschnitt 12 greifen wir den Maxwellschen Spannungstensor wieder auf und betrachten eine Darstellung, die auch für nichtsymmetrische Materialtensoren gilt.
Hier benutzen wir den Spannungstensor, um die Impuls - Flußdichte $\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}}$ als negativen Maxwellschen Spannungstensor zu definieren:

$$\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}} = -\underline{\underline{\Sigma}}. \tag{II.58}$$

Man verifiziere die aus der Mechanik bekannte Maßeinheit für eine Impuls - Flußdichte:

$$\left[\widetilde{\underline{\underline{\Sigma}}}\right] = [\underline{D}][\underline{E}] = [\varepsilon_0][\underline{E}]^2 = \frac{As}{Vm}\frac{V^2}{m^2} = \frac{VAs}{m^3} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{Ns}{m^3}\frac{m}{s} = \frac{Ns}{m^2s} \tag{II.59}$$

Setzen wir die Impuls - Flußdichte in die Bilanzgleichung ein und ersetzen die Divergenz - Terme entsprechend der Maxwellgleichungen, so folgt

$$\partial_t p_a + \partial_{x_c}\widetilde{\Sigma}_{ac} = -\rho E_a - (\underline{j}\times\underline{B})_a \tag{II.60}$$

Der Term

$$k_a^L = \rho E_a + (\underline{j}\times\underline{B})_a \tag{II.61}$$

ist die Lorentz - Kraftdichte. Wir werden sie in Abschnitt 14 noch genauer untersuchen.

Wenn man die a-Komponente von $\widetilde{\Sigma}_{ca}$ als Vektor auffaßt, dann ist

$$\partial_c\widetilde{\Sigma}_{ca} \tag{II.62}$$

gerade die Divergenz dieses Vektors und die Impuls - Bilanz hat die erwartete bekannte Form einer Bilanz - Gleichung.
Zur Interpretation der Impuls - Bilanz lassen wir die Impuls - Flußdichte zunächst außer acht; z.B. mögen alle Felder räumlich homogen sein. Schreiben wir:

$$\Delta\underline{p} = -(\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})\Delta t, \tag{II.63}$$

so liegt die Interpretation auf der Hand. Links steht die Veränderung der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes und rechts die negative Veränderung der Impulsdichte, die von allen Ladungen und Strömungen getragen wird. Die Summe aus beiden bleibt konstant. Wird die Impuls- Flußdichte mit in die Betrachtung einbezogen, so beschreibt dieser Term das mögliche Zu- oder Abfließen von Impuls.

Nebenrechnung:

- $$\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{E}\right]_a = \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bd}\,E_d\,\varepsilon_{cef}\,\partial_{x_e}E_f \tag{II.64}$$

$$\text{mit}\quad \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{cef} = \delta_{ae}\,\delta_{bf} - \delta_{af}\,\delta_{be} \tag{II.65}$$

$$= (\delta_{ae}\,\delta_{bf} - \delta_{af}\,\delta_{be})\,\varepsilon_{bd}\,E_d\,\partial x_e E_f \tag{II.66}$$

$$= \varepsilon_{bd}\,E_d\,\partial_{x_a}E_b - \varepsilon_{bd}\,E_d\,\partial_{x_b}E_a \tag{II.67}$$

$$= \partial_{x_a}(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{bd}\,E_b\,E_d) - \varepsilon_{cd}\,E_d\,\partial_{x_c}E_a \tag{II.68}$$

$$= \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{bd}\,E_b\,E_d\,\delta_{ac} - \varepsilon_{cd}\,E_d\,E_a) + \varepsilon_{cd}\,E_a\,\partial_{x_c}E_d \tag{II.69}$$

$$\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{E}\right]_a = \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{bd}\,E_b\,E_d\,\delta_{ac} - \varepsilon_{cd}\,E_d\,E_a) + E_a\,\partial_{x_c}(\varepsilon_{cd}\,E_d) \tag{II.70}$$

$$\left[\underline{D}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{E}\right]_a = \partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\underline{D}\underline{E}\,\delta_{ac} - D_c E_a) + E_a\,\partial_{x_c}D_c \tag{II.71}$$

(II.72)

- $$\left[\partial_{\underline{x}}\times\underline{\underline{\kappa}}\,\underline{B}\times\underline{B}\right]_a = \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bde}(\partial_{x_d}\kappa_{ef}\,B_f)B_c = \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bde}\,\kappa_{ef}\,B_c\partial_{x_d}B_f \tag{II.73}$$

$$\text{mit}\quad \varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{bde} = -(\delta_{ad}\,\delta_{ce} - \delta_{ae}\,\delta_{cd}) \tag{II.74}$$

$$= -(\delta_{ad}\,\delta_{ce} - \delta_{ae}\,\delta_{cd})\,\kappa_{ef}\,B_c\partial_{x_d}B_f \tag{II.75}$$

$$= -\left\{\kappa_{cf}B_c\,\partial_{x_a}B_f - \kappa_{af}\,B_c\,\partial_{x_c}B_f\right\} \tag{II.76}$$

$$= -\left\{\partial_{x_a}(\tfrac{1}{2}\,\kappa_{bd}\,B_b\,B_d) - \kappa_{ad}\,B_c\,\partial_{x_c}B_d\right\} \tag{II.77}$$

$$= -\left\{\partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\kappa_{bd}\,B_b\,B_d\,\delta_{ac} - \kappa_{ad}\,B_c\,B_d) + \kappa_{ad}\,B_d\,\partial_{x_c}B_c\right\} \tag{II.78}$$

$$\left[\partial_{\underline{x}}\times\underline{\underline{\kappa}}\,\underline{B}\times\underline{B}\right]_a = -\left\{\partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\kappa_{bd}\,B_b\,B_d\,\delta_{ac} - \kappa_{ad}\,B_d\,B_c) + \kappa_{ad}\,B_d\,\partial_{x_c}B_c\right\} \tag{II.79}$$

$$\left[\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}\times\underline{B}\right]_a = -\left\{\partial_{x_c}(\tfrac{1}{2}\,\underline{H}\,\underline{B}\,\delta_{ac} - H_a\,B_c) + H_a\,\partial_{x_c}B_c\right\} \tag{II.80}$$

6.3 Bilanz des elektromagnetischen Drehimpulses

Aus der Bilanz des Impulses kann die Bilanzgleichung für den elektromagnetischen Drehimpuls gewonnen werden. In Analogie zur Mechanik wird die elektromagnetische Drehimpulsdichte definiert als:

$$\underline{L} := \underline{x}\times\underline{p}, \tag{II.81}$$

in Komponentenschreibweise

$$L_a := \varepsilon_{abc}\,x_b\,p_c \tag{II.82}$$

$\underline{p}$ ist die im vorhergehendem Abschnitt eingeführte elektromagnetische Impulsdichte.
Die Impuls - Bilanz

$$\partial_t p_a + \partial_{x_c}\widetilde{\Sigma}_{ca} = -k_a^L \tag{II.83}$$

wird vektoriell mit dem Ortsvektor multipliziert. Es folgt

$$\varepsilon_{abc}\,x_b\,\partial_t p_c + \varepsilon_{abc}\,x_b\partial_{x_d}\,\widetilde{\Sigma}_{dc} = -\varepsilon_{abc}\,x_b\,k_c^L. \tag{II.84}$$

Nun gilt

$$\varepsilon_{abc}\,x_b\,\partial_t p_c = \partial_t(\varepsilon_{abc}\,x_b\,p_c), \tag{II.85}$$

da t und x_b unabhängig sind. Man verwechsele x_b nicht mit der Ortskoordinate eines bewegten Teilchens, für die sehr wohl $\partial_t x_b \neq 0$ gilt. Weiterhin gilt:

$$\varepsilon_{abc}\, x_b\, \partial_{x_d} \widetilde{\Sigma}_{dc} = \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}) - \varepsilon_{abc}\, \widetilde{\Sigma}_{dc}\, \partial_{x_d} x_b \tag{II.86}$$

$$= \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}) - \varepsilon_{abc}\, \widetilde{\Sigma}_{dc}\, \delta_{bd} \tag{II.87}$$

$$= \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}) - \varepsilon_{abc}\, \widetilde{\Sigma}_{bc}. \tag{II.88}$$

Der Term ganz rechts verschwindet, da für jeden Index a die verbleibende Konstruktion eine Spur aus einem symmetrischen Tensor ($\Sigma_{bc} = \Sigma_{cb}$) und einem antisymmetrischen Tensor ($\varepsilon_{abc} = -\varepsilon_{acb}$) darstellt und verschwindet. Da wir von der Impuls - Bilanz im vorhergehenden Abschnitt ausgegangen sind, übertragen sich natürlich auch die Einschränkungen an die Materialgleichungen auf den jetzigen Abschnitt. Insbesondere ist hier die Impuls - Flußdichte ebenfalls symmetrisch. Somit verbleibt

$$\varepsilon_{abc}\, x_b\, \partial_{x_d} \widetilde{\Sigma}_{dc} = \partial_{x_d}(\varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc}). \tag{II.89}$$

Eingeführt werden nun über

$$T_{da} := \varepsilon_{abc}\, x_b\, \widetilde{\Sigma}_{dc} \tag{II.90}$$

der Tensor der Drehimpuls - Flußdichte und über

$$l_a := \varepsilon_{abc}\, x_b\, k_c^L \tag{II.91}$$

die Drehmomentendichte der Lorentz - Kraft. Damit schreibt sich die Drehimpuls - Bilanz als

$$\partial_t L_a + \partial_{x_c} T_{ca} = -l_a, \tag{II.92}$$

in der wir die bekannte Form einer Bilanzgleichung wiedererkennen.

7 Elektromagnetische Potentiale

Durch die Einführung elektromagnetischer Potentiale ist das homogene Maxwell-System (II.3) und (II.4) leicht zu befriedigen. Die Gleichung

$$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0$$

wird befriedigt durch Einführung des Vektorpotentials $\underline{A}$ über

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad . \tag{II.93}$$

Das Induktionsgesetz

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} + \partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{E} + \partial_t \underline{A}) = 0$$

wird befriedigt durch Einführung des skalaren Potentials Φ über

$$\underline{E} + \partial_t \underline{A} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \quad . \tag{II.94}$$

Das „$-$“ wird in Analogie zur Mechanik eingefügt. Somit folgt

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \tag{II.95}$$

$$\underline{E} = -\partial_t \underline{A} - \partial_{\underline{x}} \Phi \tag{II.96}$$

und die homogenen Maxwell-Gleichungen für beliebige Potentiale $\underline{A}$ und Φ sind gelöst.

Wir behalten die Bezeichnungen $\underline{A}$ und Φ, die bereits in Kapitel I eingeführt wurden, bei. Jetzt ist aber zu beachten, daß die Maßsystemkonstanten ε_0 und μ_0 den Potentialen eine physikalische Dimension verleihen.

$\underline{E}$ und $\underline{B}$ ausgedrückt durch die Potentiale $\underline{A}$ und Φ werden nun in das inhomogene Maxwell-System (II.1) und (II.2) eingesetzt. Dazu sind die Materialgleichungen festzulegen. Wir betrachten

1. ein lineares Medium
2. ein isotropes Medium
3. ein ruhendes Medium
4. keine explizite Zeitabhängigkeit der Materialkoeffizienten.

Somit sollte gelten

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E} \quad , \tag{II.97}$$

$$\underline{H} = \kappa_0 \kappa \underline{B} \quad \text{bzw.} \quad \underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H} \quad . \tag{II.98}$$

ε und κ sind zeitunabhängige Skalare. Einsetzen von $\underline{D}$ und $\underline{H}$ ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu} \underline{B} \right) = \partial_t (\varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}) + \underline{j} \quad , \tag{II.99}$$

$$\partial_{\underline{x}} (\varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}) = \rho \quad . \tag{II.100}$$

Anwendung der „Produktregeln“ für die Rotation und Divergenz liefert

$$\frac{1}{\mu} \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} + \partial_{\underline{x}} \frac{1}{\mu} \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \partial_t \underline{E} + \mu_0 \underline{j} \quad ,$$

$$\varepsilon \partial_{\underline{x}} \underline{E} + \underline{E} \cdot \partial_{\underline{x}} \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad .$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} - \partial_{\underline{x}} \ln \mu \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \partial_t \underline{E} + \mu_0 \mu \underline{j} \quad ,$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{E} + \underline{E} \cdot \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho \quad .$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \partial_t \underline{E} + \mu_0 \mu \underline{j} + \partial_{\underline{x}} \ln \mu \times \underline{B} \quad ,$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho - \underline{E} \cdot \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon \quad .$$

Einarbeiten der Potentiale ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \partial_t^2 \underline{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \partial_{\underline{x}} \partial_t \Phi + \mu_0 \mu \underline{j} + \partial_{\underline{x}} \ln \mu \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad ,$$

$$-\partial_{\underline{x}} \partial_t \underline{A} - \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho + (\partial_t \underline{A} + \partial_{\underline{x}} \Phi) \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon \quad .$$

$$-\Delta \underline{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \partial_t^2 \underline{A} = \mu_0 \mu \underline{j} - \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \underline{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \partial_{\underline{x}} \partial_t \Phi + \partial_{\underline{x}} \ln \mu \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad , \tag{II.101}$$

$$-\Delta \Phi - \partial_{\underline{x}} \partial_t \underline{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho + (\partial_t \underline{A} + \partial_{\underline{x}} \Phi) \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon \quad . \tag{II.102}$$

Weitere Vereinfachungen dieser Gleichungen werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

8 Eichtransformationen

Aus Kapitel I ist bekannt, daß die Potentiale $\underline{A}$ und Φ nicht eindeutig bestimmt sind. Sie können gewissen Transformationen — genannt Eichtransformationen — unterworfen werden, ohne die physikalischen Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ zu verändern.

Wir wenden nun Eichtransformationen an, um die Gleichungen (II.101) und (II.102) zu vereinfachen:

$$\underline{A} = \underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi \tag{II.103}$$

$$\Phi = \Phi' - \partial_t\chi \qquad , \quad \chi\text{: Eichfunktion} \quad . \tag{II.104}$$

Zunächst wird geprüft, ob $\underline{E}$ und $\underline{B}$ unverändert bleiben.

$$\begin{aligned}
\underline{B} &= \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi) = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}' \\
\underline{E} &= -\partial_t \underline{A} - \partial_{\underline{x}}\Phi = -\partial_t(\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi) - \partial_{\underline{x}}(\Phi' - \partial_t\chi) \\
\underline{E} &= -\partial_t \underline{A}' - \partial_{\underline{x}}\Phi' \underbrace{-\partial_t\partial_{\underline{x}}\chi + \partial_{\underline{x}}\partial_t\chi}_{=0} \quad .
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ **eich-invariant** beim Übergang von $\underline{A}$, Φ zu $\underline{A}'$, Φ'. Wir setzen nun die transformierten Potentiale mit zunächst beliebiger Eichfunktion χ in die Gleichungen (II.101) und (II.102) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\Delta(\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi) - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t^2(\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi) &= -\mu_0\mu\,\underline{j} \\
&+ \underbrace{\partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{A}' + \Delta\chi + \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t\Phi' - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t^2\chi)}_{(*)} \\
&- \varepsilon_0\mu_0\partial_{\underline{x}}(\varepsilon\mu)\partial_t(\Phi' - \partial_t\chi) - \partial_{\underline{x}}\ln\mu \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}' \quad ,
\end{aligned} \tag{II.105}$$

$$\Delta(\Phi' - \partial_t\chi) + \partial_t\partial_{\underline{x}}(\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi) = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho - (\partial_t\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\Phi')\partial_{\underline{x}}\ln\varepsilon \quad . \tag{II.106}$$

8.1 Lorentz-Eichung

Wir wählen nun eine spezielle Eichfunktion, so daß der Term $(*)$ verschwindet, d.h. es ist für χ die sogenannte Eichgleichung

$$\Delta\chi - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t^2\chi = -\partial_{\underline{x}}\underline{A}' - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t\Phi' \tag{II.107}$$

zu erfüllen. Explizit ist die Lösung überhaupt nicht von Interesse; das Wissen um ihre Existenz ist ausreichend. Wir nennen diese Lösung χ_L. Dieses χ_L benutzen wir, um zu

$$\underline{A} = \underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi_L \qquad , \tag{II.108}$$

$$\Phi = \Phi' - \partial_t\chi_L \tag{II.109}$$

zurückzukehren, und erhalten

$$\Delta\underline{A} - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\,\underline{j} - \varepsilon_0\mu_0\partial_{\underline{x}}(\varepsilon\mu)\partial_t\Phi - \partial_{\underline{x}}\ln\mu \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \tag{II.110}$$

$$\Delta\Phi + \partial_t\partial_{\underline{x}}\underline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho - (\partial_t\underline{A} + \partial_{\underline{x}}\Phi)\partial_{\underline{x}}\ln\varepsilon \quad . \tag{II.111}$$

Die Eichgleichung wird zu

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\,\partial_t\Phi = 0 \qquad \text{(Lorentz-Bedingung)}. \tag{II.112}$$

Spezialisieren wir noch auf den wichtigen Fall **homogener Medien** ($\partial_{\underline{x}}\mu = \partial_{\underline{x}}\varepsilon = 0$), ersetzen $\partial_{\underline{x}}\underline{A}$ vermittels der Lorentz-Bedingung und führen die Abkürzung

$$c_{\text{Ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}} \qquad \text{(Phasengeschwindigkeit)}$$

ein, so folgt

$$\Delta\underline{A} - \frac{1}{c_{\text{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\,\underline{j} \tag{II.113}$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_{\text{Ph}}^2}\partial_t^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho \quad . \tag{II.114}$$

Diese beiden Gleichungen sind von gleicher Form und sie sind entkoppelt! Sie repräsentieren inhomogene Wellengleichungen und sind zusammen mit der Eichgleichung den Maxwell-Gleichungen äquivalent. Die Lorentz-Eichung ist nicht die einzige Möglichkeit zur Vereinfachung der Gleichungen für die Potentiale $\underline{A}$ und Φ. Ihr Vorzug besteht in der Entkoppelung der Gleichungen für $\underline{A}$ und Φ, deren Symmetrie und schließlich ist die Lorentz-Bedingung koordinatenunabhängig und ordnet sich in natürlicher Weise in das Konzept der speziellen Relativitätstheorie ein.

8.2 Coulomb-Eichung

Die Wahl anderer Eichfunktionen als χ_L führt auf andere Eichbedingungen und die Formen der Gleichungen für $\underline{A}$ und Φ ändern sich natürlich auch. Von Bedeutung ist auch die Coulomb-Eichung, bei der eine Eichfunktion χ_C benutzt wird, die

$$\partial_{\underline{x}}(\underline{A}' + \partial_{\underline{x}}\chi_C) = 0 \tag{II.115}$$

realisiert. Rücktransformation auf $\underline{A}$ und Φ ergibt dann die Eichgleichung

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0 \qquad \text{(Coulomb-Bedingung)} \tag{II.116}$$

sowie

$$\Delta\underline{A} - \frac{1}{c_{\text{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\,\underline{j} + \frac{1}{c_{\text{Ph}}^2}\partial_{\underline{x}}\partial_t\Phi - \partial_{\underline{x}}\ln\mu \times \partial_{\underline{x}}\times\underline{A} \tag{II.117}$$

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho - (\partial_t\underline{A} + \partial_{\underline{x}}\Phi)\partial_{\underline{x}}\ln\varepsilon \quad . \tag{II.118}$$

Beschränken wir uns wiederum auf homogene Medien ($\partial_{\underline{x}}\mu = \partial_{\underline{x}}\varepsilon = 0$), so folgt

$$\Delta\underline{A} - \frac{1}{c_{\text{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\,\underline{j} + \frac{1}{c_{\text{Ph}}^2}\partial_{\underline{x}}\partial_t\Phi \tag{II.119}$$

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho \quad . \tag{II.120}$$

Für das skalare Potential Φ gilt die Poisson-Gleichung, deren Lösung wir in Kapitel I bereits ausgerechnet haben:

$$\Phi(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int dV'\,\frac{\rho(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{II.121}$$

Das skalare Potential Φ ist somit das momentane Coulomb-Potential der Ladungsdichte $\rho(\underline{x},t)$.

Damit kann der Term $\partial_{\underline{x}}\partial_t\Phi$ in Gleichung (II.119) berechnet werden und es verbleibt eine inhomogene Wellengleichung für $\underline{A}$. Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich jedoch deutlich vereinfachen.

Wir zerlegen die Stromdichte in zwei Anteile

$$\underline{j} = \underline{j}_L + \underline{j}_T \quad .$$

$\underline{j}_L$ ist der longitudinale oder wirbelfreie Anteil mit

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{j}_L = 0 \quad . \tag{II.122}$$

$\underline{j}_T$ ist der transversale oder quellenfreie (solenoidale) Anteil mit

$$\partial_{\underline{x}}\underline{j}_T = 0 \quad . \tag{II.123}$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Vektor-Identität

$$\partial_{\underline{x}}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{j} = \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{j}) - \Delta\underline{j} \tag{II.124}$$

ein und erhalten

$$\Delta(\underline{j}_L + \underline{j}_T) = \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{j}_L) - \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{j}_T \quad . \tag{II.125}$$

Auftrennung ergibt

$$\Delta\underline{j}_L = \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{j}_L) \quad , \tag{II.126}$$

$$\Delta\underline{j}_T = -\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{j}_T) \quad . \tag{II.127}$$

Hier interessiert nur der longitudinale Anteil $\underline{j}_L$. Addition einer Null auf der rechten Seite ($\partial_{\underline{x}}\underline{j}_T = 0$) ergibt

$$\Delta\underline{j}_L = \partial_{\underline{x}}(\partial_{\underline{x}}\underline{j}) \quad . \tag{II.128}$$

Die rechte Seite wird als Inhomogenität einer Poisson-Gleichung aufgefaßt und die formale Lösung für $\underline{j}_L$ in der Form

$$\underline{j}_L(\underline{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial_{\underline{x}}'\left(\partial_{\underline{x}}'\underline{j}(\underline{x}',t)\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \tag{II.129}$$

erhalten. Partielle Integration liefert

$$\underline{j}_L(\underline{x},t) = +\frac{1}{4\pi}\int \partial_{\underline{x}}'\underline{j}(\underline{x}',t)\cdot\partial_{\underline{x}}'\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \quad . \tag{II.130}$$

Nun gilt

$$\partial_{\underline{x}}'\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -\partial_{\underline{x}}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

und es folgt

$$\underline{j}_L(\underline{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\partial_{\underline{x}}\int dV'\frac{\partial_{\underline{x}}'\underline{j}(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{II.131}$$

Wenden wir die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_{\underline{x}}'\underline{j}(\underline{x}',t) + \partial_t\rho(\underline{x}',t) = 0$$

an, so ergibt sich

$$\underline{j}_L(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi}\partial_{\underline{x}}\partial_t\int dV'\frac{\rho(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{II.132}$$

Herausziehen des skalaren Potentials Φ liefert

$$\underline{j}_L(\underline{x},t) = \varepsilon_0\varepsilon\partial_{\underline{x}}\partial_t\Phi \tag{II.133}$$

bzw.

$$-\mu_0\mu\underline{j}_L + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_{\underline{x}}\partial_t\Phi = 0 \quad ; \tag{II.134}$$

der longitudinale Stromanteil und die Ableitung des skalaren Potentials Φ kompensieren sich gerade. Auf der rechten Seite von (II.119) verbleibt nur noch der transversale Stromanteil:

$$\Delta\underline{A} - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\underline{j}_T \tag{II.135}$$

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho \quad . \tag{II.136}$$

Aufgrunddessen wird die Coulomb-Eichung auch **transversale** Eichung genannt.

9 Retardierte und avancierte Potentiale

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten Grundgleichungen aufgestellt und umgeformt wurden, sollen einige nun gelöst werden.

Vorausgesetzt sei ein homogenes isotropes Medium mit Strom- und Ladungsquellen. Für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes verwenden wir die Potentiale $\underline{A}$ und Φ. Wir eichen die Potentiale durch die Lorentz-Bedingung

$$\partial_{\underline{x}} \underline{A} + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \partial_t \Phi = 0 \quad . \tag{II.137}$$

Dann gilt

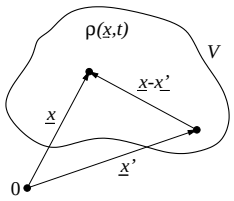
$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \partial_t^2 \underline{A} = -\mu_0 \mu \, \underline{j} \tag{II.138}$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \partial_t^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho \quad . \tag{II.139}$$

Es handelt sich hier um lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, speziell um Wellengleichungen. Die allgemeine Lösung linearer Differentialgleichungen setzt sich zusammen als Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Problems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems. Die in der allgemeinen Lösung des homogenen Problems enthaltenen Freiheitsgrade werden genutzt, um die Lösung an mögliche vorgegebene Rand- und Anfangswerte anzupassen.

Wir wollen hier keine speziellen Ränder betrachten, sondern den unendlichen Raum, in dem sich inselartige Strom- und Ladungsquellen befinden. Von Interesse ist dann nur die Lösung der inhomogenen Gleichungen. Für Φ gilt:

$$\Phi(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_V \frac{\rho\left(\underline{x}', t \mp \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} dV' \quad . \tag{II.140}$$



Dieses Ergebnis beweist man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung.

Bemerkung: Für $c_{\mathrm{Ph}} \to \infty$ gelangt man formal zum stationären Grenzfall. Die Wellengleichung geht dann über in die Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho$$

mit der Lösung

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} dV' \quad .$$

Diese Situation wurde bereits in Kapitel I besprochen.

Offensichtlich existieren zwei Lösungen, die sich in der Quellzeit um ein Vorzeichen unterscheiden. Die Lösung mit dem Zeitargument

$$t_R = t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}} \qquad \text{(retardierte Zeit)} \tag{II.141}$$

beschreibt das retardierte Potential, die mit

$$t_A = t + \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}} \qquad \text{(avancierte Zeit)} \tag{II.142}$$

das avancierte Potential. Das die beiden Lösungen auftreten müssen, ist klar, da die Wellengleichung invariant gegenüber der Transformation $c_{\mathrm{Ph}} \to -c_{\mathrm{Ph}}$ ist.

Wir diskutieren nun die beiden Lösungen. Wir betrachten das retardierte Potential zur Zeit t am Ort $\underline{x}$, $\Phi(\underline{x},t)$. Dieser Potentialwert wird nun durch die möglichen Quellstärken ρ an den verschiedenen Orten $\underline{x}'$ zu den Zeiten t_R bestimmt. Da aber stets $t_R \leq t$ gilt, wird das Potential zur Zeit t von Quellstärken zur gleichen Zeit oder von vorherigen Quellstärken festgelegt. Die Kausalität ist gewahrt.

Das avancierte Potential zur Zeit t wird jedoch von Quellereignissen zur Zeit t_A beeinflußt; wegen $t_A \geq t$ ist hier die Kausalität nicht gewahrt: Zukünftige Ursachen zeigen gegenwärtige Wirkungen. Diese Lösung muß offensichtlich ausgeschlossen werden. Diese zusätzliche Maßnahme über die Einführung der Maxwell-Gleichungen hinaus, legt den Schluß nahe, daß die Maxwellsche Theorie keine abgeschlossene Theorie darstellen kann.

Für $\underline{A}$ gilt völlig analog

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V \frac{\underline{j}\left(\underline{x}',t\mp\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \tag{II.143}$$

sowie auch die vorangegangene Diskussion.

Achtung: Φ und $\underline{A}$ mit den obigen Darstellungen erfüllen die entsprechenden Wellengleichungen. Zu prüfen ist jedoch auch die Erfüllung der Eichgleichung!

Es soll also die Eichgleichung (II.137) überprüft werden. Einsetzen der retardierten Potentiale $\underline{A}$ und Φ (avancierte Potentiale analog) ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\limits_V \partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}\left(\underline{x}',t\mp\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_V \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\partial_t\rho\left(\underline{x}',t\mp\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c_{\mathrm{Ph}}}\right)dV' \stackrel{!}{=} 0\\
&\Rightarrow \int\left(\partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_t\rho(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right)dV' \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{wobei} \quad t_R = t_R(t,\underline{x},\underline{x}') \quad .
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} &= \underline{j}(\underline{x}',t_R)\cdot\partial_{\underline{x}}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_{t_R}\underline{j}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\cdot\partial_{\underline{x}}t_R\\
&= -\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\cdot\underline{j}(\underline{x}',t_R) - \partial_{t_R}\underline{j}\frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}}\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2} \quad .
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}'}\frac{\underline{j}(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} &= \underline{j}(\underline{x}',t_R)\partial_{\underline{x}'}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_{\underline{x}'}\underline{j}(\underline{x}',t_R)\big|_{t_R} + \partial_{t_R}\underline{j}\cdot\partial_{\underline{x}'}t_R}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\\
&= \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\underline{j}(\underline{x}',t_R) + \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\left(\partial_{\underline{x}'}\underline{j}(\underline{x}',t_R)\Big|_{t_R} + \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}}\partial_{t_R}\underline{j}(\underline{x}',t_R)\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Damit kann man schreiben

$$\partial_{\underline{x}}\frac{\underline{j}(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \partial_{\underline{x}'}\frac{\underline{j}(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{\partial_{\underline{x}'}\underline{j}(\underline{x}',t_R)\big|_{t_R}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad . \tag{II.144}$$

Dieser Ausdruck wird im Integranden der Eichgleichung genutzt und es folgt

$$\int\left(-\partial_{\underline{x}'}\frac{\underline{j}(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_{\underline{x}'}\underline{j}(\underline{x}',t_R)\big|_{t_R}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} + \frac{\partial_t\rho(\underline{x}',t_R)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right)dV' = 0 \quad .$$

Der zweite und dritte Term bilden die Ladungsbilanz

$$\partial_{\underline{x}'}\underline{j}(\underline{x}',t_R)\big|_{t_R} + \partial_t\rho(\underline{x}',t_R) = \partial_{\underline{x}'}\underline{j}(\underline{x}',t_R) + \partial_t\rho(\underline{x}',t_R) = 0$$

und heben sich heraus. Den verbleibenden ersten Term formen wir mittels des Gaußschen Satzes um zu

$$\int_V \partial_{\underline{x}'} \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} dV' = \oint_S \frac{\underline{j}(\underline{x}', t_R)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{S} \quad .$$

Die Oberfläche S liegt im Unendlichen, wo die inselartige Stromquelle $\underline{j}$ verschwindet. Somit verschwindet der gesamte Term und die Eichgleichung (II.137) ist erfüllt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch die Darstellung der retardierten und avancierten Potentiale mit Hilfe der s.g. Greenschen Funktion erfolgen. Wir beschränken uns o.B.d.A. auf die retardierten Potentiale, denn mit $c_{Ph} \to -c_{Ph}$ gelangt man zu den avancierten Potentialen.
Die retardierte Greensche Funktion der elektromagnetischen Wellengleichung ist durch

$$G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') = \begin{cases} \frac{\delta(t - t' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}})}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} & \text{für} \quad t > t' \\ 0 & \text{für} \quad t < t' \end{cases} \tag{II.145}$$

definiert (siehe auch Skript Rechenmethoden Abschnitt 7.3.2).
Damit lassen sich die retardierten Potentiale darstellen in der Form:

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x}, t) &= \mu_0 \mu \int dV' \int dt' G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') \, \underline{j}(\underline{x}', t') \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int dt' G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') \, \rho(\underline{x}', t') \quad . \end{aligned} \tag{II.146}$$

Zum Beweis setzen wir die Greensche Funktion ein und führen die Zeitintegration aus. Für das skalare Potential folgt dann

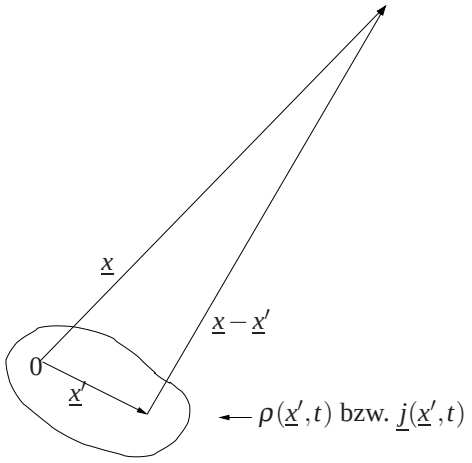
$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}})}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \rho(\underline{x}', t') \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int_{t}^{\infty} dt' \quad 0 \quad \rho(\underline{x}', t') \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{\rho(\underline{x}', t')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \delta(t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}} - t') \\ \phi(\underline{x}, t) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int dV' \frac{\rho(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c_{Ph}})}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \end{aligned} \tag{II.147}$$

Die Beweisführung für das Vektorpotential ist natürlich analog.

q.e.d.

10 Multipol-Entwicklung

Die retardierten Potentiale sollen nun ausgewertet werden für große Entfernungen von inselartigen Quellen.



Für die Wahl des Koordinatenursprungs innerhalb der Ladungsverteilung gilt also

$$\frac{|\underline{x}'|}{|\underline{x}|} \ll 1$$

und Taylor - Entwicklungen nach $\underline{x}'$ sind somit naheliegend. Im Fernfeld ($|\underline{x}| >> |\underline{x}'|$) liefern bereits die Terme niedriger Ordnungen präzise Darstellungen. Physikalisch ist auch klar, daß für große Entfernungen des Aufpunktes von der Quelle, eine sehr spezielle Mikrokonfiguration der Quellfunktionen ρ und $\underline{j}$ nicht entscheidend sind, sondern die Potentiale durch globale Parameter der Quellfunktionen bestimmt werden. Folgende globalen Quellparameter werden innerhalb dieses Abschnitts definiert:

- Gesamtladung $Q := \int dV' \rho(\underline{x}',t)$
- Elektrisches Dipolmoment $\underline{p}(t) := \int dV' \underline{x}' \rho(\underline{x}',t)$
- Magnetisches Dipolmoment $\underline{m}(t) := \frac{1}{2} \int dV' \underline{x}' \times \underline{j}(\underline{x}',t)$

Außerdem wollen wir aus praktischen Gründen folgende Abkürzungen verwenden:

- $r := |\underline{x}|$
- $v := c_{Ph}$

Die betrachteten Materialien seien wiederum linear, homogen, isotrop, relaxationsfrei und remanenzfrei. Die weitere Mühe besteht nun in der Taylorentwicklung der Potentiale

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int dV' \frac{\underline{j}(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v})}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \\ \phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int dV' \frac{\rho(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v})}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \qquad . \end{aligned} \tag{II.148}$$

Wir betrachten zunächst die Funktion:

$$f(\underline{x}') \equiv f(x_1',x_2',x_3') := |\underline{x}-\underline{x}'| = \sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2} \tag{II.149}$$

und entwickeln bei $\underline{x}' = 0$ bis zur ersten Ordnung in x_1', x_2', x_3'. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_1',x_2',x_3') &= f(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial x_1'}\Big|_0 x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2'}\Big|_0 x_2' + \frac{\partial f}{\partial x_3'}\Big|_0 x_3' + \ldots \\ |\underline{x}-\underline{x}'| &= r - \frac{x_1}{r}x_1' - \frac{x_2}{r}x_2' - \frac{x_3}{r}x_3' + \ldots \\ |\underline{x}-\underline{x}'| &= r - \frac{\underline{x}\underline{x}'}{r} + \ldots \\ \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} &= \frac{1}{r(1-\frac{\underline{x}\underline{x}'}{r^2}+\ldots)} = \frac{1}{r}(1+\frac{\underline{x}\underline{x}'}{r^2}+\ldots) \\ \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} &= \frac{1}{r} + \frac{\underline{x}\underline{x}'}{r^3} + \ldots \end{aligned} \tag{II.150}$$

Nun werden die Quellen in folgender Weise entwickelt:

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v}) &= \rho(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \frac{\partial\rho(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t_R}\partial_{\underline{x}}{}'t_R\Big|_0 \underline{x}' + \ldots \\ \underline{j}(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v}) &= \underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \underline{j}(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t_R}\partial_{\underline{x}}{}'t_R\Big|_0 \underline{x}' + \ldots \end{aligned} \tag{II.151}$$

wobei die retardierte Zeit des vorigen Abschnitts übernommen wurde:

$$t_R = t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v} \qquad .$$

Nun gilt

$$\partial_{\underline{x}}{}'t_R\Big|_0 = \frac{\underline{x}}{rv}$$

und statt $\frac{\partial}{\partial t_R}$ schreiben wir einfach $\frac{\partial}{\partial t}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v}) &= \rho(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \frac{\partial\rho(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t}\frac{\underline{x}\cdot\underline{x}'}{rv} + \ldots \\ \underline{j}(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{v}) &= \underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \underline{j}(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t}\frac{\underline{x}\cdot\underline{x}'}{rv} + \ldots \end{aligned} \tag{II.152}$$

Für das skalare Potential ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int dV'\left\{\rho(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \frac{\partial\rho(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t}\frac{\underline{x}\underline{x}'}{rv}+\ldots\right\}\left\{\frac{1}{r}+\frac{\underline{x}\underline{x}'}{r^3}+\ldots\right\} \\ \phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{1}{r}\int dV'\rho(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \left(\frac{\underline{x}}{r^3}+\frac{\underline{x}}{r^2v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\int dV'\underline{x}'\rho(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})+\ldots\right\} \\ \phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r}+\left(\frac{\underline{x}}{r^3}+\frac{\underline{x}}{r^2v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{p}(t-\tfrac{r}{v})+\ldots\right\} \\ \phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\underline{x}\dot{\underline{p}}(t-\frac{r}{v})}{r^2v} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\underline{x}\underline{p}(t-\frac{r}{v})}{r^3}+\ldots \end{aligned} \tag{II.153}$$

Der erste Term entspricht dem Potential einer Punktladung Q; er fällt mit $\frac{1}{r}$ im Fernfeld ab. Der zweite Term ist ein typischer dynamischer Dipolbeitrag, der ebenfalls mit $\frac{1}{r}$ abfällt; man beachte $|\underline{x}| = r$. Der dritte Term tritt auch bei einem statischen Dipol auf; er fällt mit $\frac{1}{r^2}$ schneller ab als die beiden ersten Terme.

Für das Vektorpotential ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int dV'\left\{\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \frac{\partial \underline{j}(\underline{x}',t-\frac{r}{v})}{\partial t}\frac{\underline{x}\underline{x}'}{rv}+\ldots\right\}\left\{\frac{1}{r}+\frac{\underline{x}\underline{x}'}{r^3}+\ldots\right\} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\int dV'\,\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v}) + \left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^2v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\int dV'\,\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})(\underline{x}\underline{x}')+\ldots\right\} \end{aligned} \tag{II.154}$$

Die Terme können weiter umgeformt werden. Für die Umformung des erstens Terms gehen wir vom elektrischen Dipolmoment

$$\underline{p}(t) = \int dV' \, \underline{x}' \, \rho(\underline{x}', t) \tag{II.155}$$

aus. Zeitliche Differentiation ergibt:

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{p}}(t) &= \int dV' \, \underline{x}' \, \dot{\rho}(\underline{x}', t) \\
\dot{\underline{p}}(t) &= -\int dV' \, \underline{x}' \, \partial_{\underline{x}'} \underline{j}(\underline{x}', t) \\
\dot{p_a}(t) &= -\int dV' \, x'_a \, \partial_{x'_b} j_b(\underline{x}', t) \\
\dot{p_a}(t) &= -\int dV' \, \partial_{x'_b}(x'_a \, j_b) + \int dV' \, j_b(\underline{x}', t) \delta_{ab} \\
\dot{p_a}(t) &= -\int d\underline{S}' \, x'_a \, \underline{j}(\underline{x}', t) + \int dV' \, j_a(\underline{x}', t) \\
\dot{p_a}(t) &= \int dV' \, j_a(\underline{x}', t) \qquad ,
\end{aligned} \tag{II.156}$$

da für inselartige Quellen die Stromdichte auf einer Oberfläche S' jenseits der Insel verschwindet und mit ihr das Oberflächenintegral. Somit verbleibt für den ersten Term

$$\dot{\underline{p}}(t - \tfrac{r}{v}) = \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t - \tfrac{r}{v}) \qquad . \tag{II.157}$$

Für den zweiten Term gehen wir vom magnetischen Dipolmoment

$$\underline{m}(t) = \tfrac{1}{2} \int dV' \, \underline{x}' \times \underline{j}(\underline{x}', t) \tag{II.158}$$

aus. Vektorielle Multiplikation mit $\underline{x}$ ergibt

$$\begin{aligned}
\underline{m}(t) \times \underline{x} &= \tfrac{1}{2} \int dV' \left(\underline{x}' \times \underline{j}(\underline{x}', t) \right) \times \underline{x} \\
\underline{m}(t) \times \underline{x} &= \tfrac{1}{2} \int dV' \underline{x} \times \left(\underline{j}(\underline{x}', t) \times \underline{x}' \right) \\
\underline{m}(t) \times \underline{x} &= \tfrac{1}{2} \int dV' \left\{ \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\underline{x}') - \underline{x}'(\underline{x} \, \underline{j}(\underline{x}', t)) \right\}
\end{aligned} \tag{II.159}$$

Der äußerste rechte Term ist weiter in Komponentenschreibweise umzuformen:

$$\begin{aligned}
&\int dV' x'_a x_b \, j_b(\underline{x}', t) = x_b \int dV' x'_a \delta_{bc} \, j_c(\underline{x}', t) \\
&= x_b \int dV' x'_a \frac{\partial x'_b}{\partial x'_c} \, j_c(\underline{x}', t) = -x_b \int dV' x'_b \frac{\partial \left(x'_a \, j_c(\underline{x}', t) \right)}{\partial x'_c} \\
&= -x_b \int dV' x'_b \frac{\partial x'_a}{\partial x'_c} \, j_c(\underline{x}', t) - x_b \int dV' x'_b x'_a \frac{j_c(\underline{x}', t)}{\partial x'_c} \\
&= -x_b \int dV' x'_b \, j_a(\underline{x}', t) + x_b \int dV' x'_a x'_b \dot{\rho} \qquad .
\end{aligned} \tag{II.160}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\underline{m}(t) \times \underline{x} = \quad & \tfrac{1}{2} \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\underline{x}') \\
& + \tfrac{1}{2} \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\underline{x}') \\
& - \tfrac{1}{2} \int dV' \, \dot{\rho}(\underline{x}', t) \underline{x}' \, (\underline{x}\underline{x}') \\
\underline{m}(t) \times \underline{x} = \quad & \int dV' \, \underline{j}(\underline{x}', t)(\underline{x}\underline{x}') \\
& - \tfrac{1}{2} \int dV' \, \dot{\rho}(\underline{x}', t) \underline{x}' \, (\underline{x}\underline{x}') \qquad .
\end{aligned} \tag{II.161}$$

So lautet der gesuchte zweite Term im Vektorpotential

$$\begin{aligned}&\int dV'\,\underline{j}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})(\underline{x}\underline{x}')\\&\quad=\underline{m}(t-\tfrac{r}{v})\times\underline{x}+\tfrac{1}{2}\int dV'\,\dot{\rho}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{v})\underline{x}'\,(\underline{x}\underline{x}')\qquad .\end{aligned}\tag{II.162}$$

Der äußerst rechte Ausdruck ist aber von 2. Ordnung in $\underline{x}'$, so daß wir ihn in unserer Betrachtung bis zur 1. Ordnung in $\underline{x}'$ weglassen können. Es verbleibt

$$\begin{aligned}\underline{A}(\underline{x},t)&=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\dot{\underline{p}}(t-\tfrac{r}{v})\\&\quad+\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^2v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{m}(t-\tfrac{r}{v})\times\underline{x}+\ldots\\\underline{A}(\underline{x},t)&=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{\dot{\underline{p}}(t-\frac{r}{v})}{r}+\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{\dot{\underline{m}}(t-\frac{r}{v})\times\underline{x}}{r^2v}+\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{\underline{m}(t-\frac{r}{v})\times\underline{x}}{r^3}+\ldots\end{aligned}\tag{II.163}$$

Um die äußerlich symmetrische Form der Multipol- Entwicklung des skalaren und des Vektorpotentials zu verdeutlichen,stellen wir beide Gleichungen noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\quad\frac{Q}{r}\quad+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{\dot{\underline{p}}(t-\frac{r}{v})\underline{x}}{r^2v}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{\underline{p}(t-\frac{r}{v})\underline{x}}{r^3}+\ldots\\\underline{A}(\underline{x},t)&=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{\dot{\underline{p}}(t-\frac{r}{v})}{r}+\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{\dot{\underline{m}}(t-\frac{r}{v})\times\underline{x}}{r^2v}+\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{\underline{m}(t-\frac{r}{v})\times\underline{x}}{r^3}+\ldots\end{aligned}\tag{II.164}$$

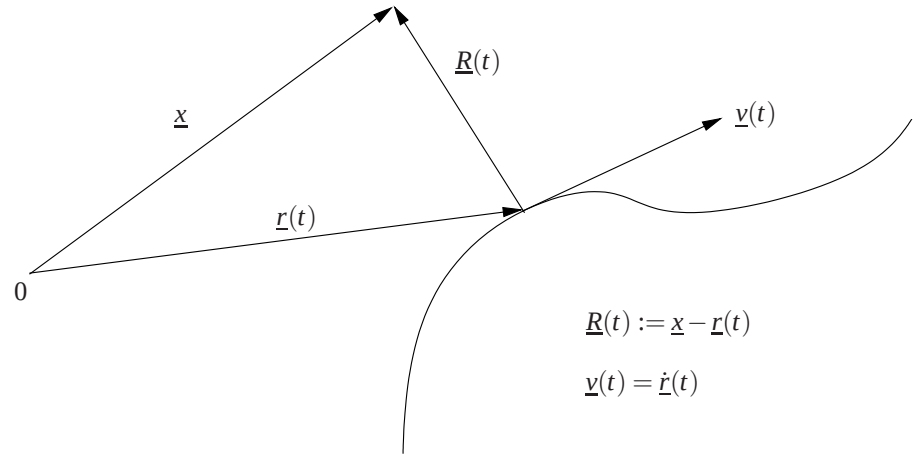
Spezialisierungen auf konkrete Quellfunktionen sind nun leicht möglich, ebenso wie der Fernfeldberechnung von $\underline{E}$ und $\underline{B}$.

Wenn die Taylor - Entwicklung weiter als bis zur 1. Ordnung in $\underline{x}'$ vorgenommen wird, erscheinen auch höhere Momente als Monopol und Dipole, nämlich

- Quadrupole
- Oktupole
- etc.

11 Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung

Wir betrachten eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ entlang einer Bahnkurve $\underline{r}(t)$ im Vakuum bewegt.



Letztendlich soll für dieses Standardproblem die Abstrahlung elektromagnetischer Energie untersucht werden. Dazu sind folgende Schritte auszuführen:

- Berechnung der retardierten Potentiale $\underline{A}, \phi$
- Berechnung der elm. Felder $\underline{E}, \underline{B}$
- Berechnung des Poynting- Vektors
- Berechnung der Intensität der Energieabstrahlung in den Raum

11.1 Lienard- Wiechert- Potentiale

Die mit der bewegten Ladung verbundene Ladungs- und Stromdichte läßt sich leicht konstruieren:

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}',t) &= q\,\delta(\underline{x}' - \underline{r}(t)) \\ \underline{j}(\underline{x}',t) &= \rho(\underline{x}',t)\,\underline{v}(t) = q\,\underline{v}(t)\,\delta(\underline{x}' - \underline{r}(t)) \end{aligned} \tag{II.165}$$

Zunächst überzeugen wir uns von der Erfüllung der Ladungsbilanz. Mit der Abkürzung

$$\underline{y}(t) := \underline{x}' - \underline{r}(t) \tag{II.166}$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(\underline{x}',t) &= q\,\partial_t\,\delta(\underline{y}(t)) \\ &= q\,\partial_{y_a}\,\delta(\underline{y}(t))\cdot \dot{y}_a \\ &= -\,q\,\partial_{y_a}\,\delta(\underline{y}(t))\,v_a(t) \\ &= -\,\partial_{y_a}\,q\,v_a\,\delta(\underline{y}(t)) \\ &= -\,\partial_{x'_b}\left\{q\,v_a(t)\,\delta(\underline{x}' - \underline{r}(t))\right\}\frac{\partial x'_b}{\partial y_a} \\ &= -\,\partial_{x'_b}\,j_a(\underline{x}',t)\,\delta_{ba} \\ &= -\,\partial_{\underline{x}'}\,\underline{j}(\underline{x}',t) \qquad . \end{aligned} \tag{II.167}$$

Zur Berechnung der retardierten Potentiale gehen wir von deren Darstellung mit Hilfe der Greenschen Funktion aus, also

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) =& \frac{1}{\varepsilon_0}\int dV' \int dt' G(\underline{x}-\underline{x}',t-t')\,\rho(\underline{x}',t') \\ \underline{A}(\underline{x},t) =& \mu_0 \int dV' \int dt' G(\underline{x}-\underline{x}',t-t')\,\underline{j}(\underline{x}',t') \qquad .\end{aligned} \tag{II.168}$$

Einsetzen der Quellen und Greenschen Funktion liefert

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \,\frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, q\,\delta(\underline{x}'-\underline{r}(t')) \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \,\frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, q\underline{v}(t')\,\delta(\underline{x}'-\underline{r}(t'))\end{aligned} \tag{II.169}$$

Integration über das Quellvolumen ergibt

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \,\frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{c})}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \,\frac{\underline{v}(t')\,\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{c})}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}\end{aligned} \tag{II.170}$$

Die dt' - Integration läßt sich nicht unmittelbar ausführen, da der t' - Wert, für den das Argument der δ - Funktion verschwindet, i.a. nicht explizit angebbar ist. Es folgen die Substitutionen

$$\begin{aligned}\underline{R}(t') :=& \underline{x}-\underline{r}(t') \\ R(t') :=& |\underline{R}(t')| = |\underline{x}-\underline{r}(t')| \\ \xi :=& t'-t+\frac{R(t')}{c}\end{aligned} \tag{II.171}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt'} &= 1+\frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'} \\ \frac{dR(t')}{dt'} &= \frac{d|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{dt'} \\ &= \partial_{\underline{x}}|\underline{x}-\underline{r}(t')|\,(-\underline{v}(t')) \\ &= -\underline{v}(t')\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|} \\ \frac{dR(t')}{dt'} &= -\underline{v}(t')\,\frac{\underline{R}(t')}{R(t')} \\ \frac{d\xi}{dt'} &= 1-\frac{\underline{v}(t')}{c}\,\frac{\underline{R}(t')}{R(t')} \\ \frac{dt'}{|\underline{x}-\underline{r}(t)|} &= \frac{dt'}{R(t')} = \frac{d\xi}{R(t')-\frac{\underline{v}(t')\underline{R}(t')}{c}} \qquad .\end{aligned} \tag{II.172}$$

Damit nehmen die Potentiale die Form

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\xi \frac{\delta(\xi)}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')} \\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi}\int d\xi \frac{\underline{v}(t')\,\delta(\xi)}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\end{aligned} \tag{II.173}$$

und somit

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\right]_{ret} \qquad ;\\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\underline{v}(t')}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\right]_{ret} = \frac{\underline{v}(t')}{c^2}\,\phi(\underline{x},t)\end{aligned} \tag{II.174}$$

an. Das Symbol $[...]_{ret}$ markiert, daß t' aus $\xi = 0 = t'-t+\frac{R(t')}{c}$ auszurechnen und in der prinzipiellen Form

$$t' = t'(\underline{x},t) \tag{II.175}$$

einzusetzen ist. Explizit läßt sich t' nur für einfache Bewegungsprobleme angeben.
Die o.a. Potentiale heißen auch ***Lienard - Wiechert - Potentiale***.

11.2 Feldberechnung aus den Lienard - Wiechert - Potentialen

Ausgangspunkt sind die Lienard - Wiechert - Potentiale in der Form

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R(t')-\frac{1}{c}\underline{v}(t')\underline{R}(t')}\\ \underline{A}(\underline{x},t) &= \frac{\underline{v}(t')}{c^2}\,\phi(\underline{x},t)\\ &\text{mit}\\ t' &= t'(\underline{x},t)\\ &\text{aus}\\ t-t' &= \frac{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}{c} = \frac{1}{c}|R(t')| = \frac{1}{c}R(t')\end{aligned} \tag{II.176}$$

Für die Feldberechnung

$$\begin{aligned}\underline{E} &= -\,\partial_{\underline{x}}\phi - \partial_t\underline{A}\\ \underline{B} &= \partial_{\underline{x}}\times\underline{A}\end{aligned} \tag{II.177}$$

sind $\underline{A}$ und ϕ nach $\underline{x}$ und t zu differenzieren, die explizit von $\underline{x}$ und implizit über t' von $\underline{x}$ und t abhängen. Demnach werden die Ausdrücke $\frac{\partial t'}{\partial t}$ und $\partial_{\underline{x}}t'$ benötigt. Diese Rechnung führen wir im Detail vor; sie ist eine perfekte Übung für implizites Differenzieren und die Anwendung der Kettenregel. Aus

$$t-t'(\underline{x},t) = \frac{1}{c}\,|\underline{x}-\underline{r}(t'(\underline{x},t))| \tag{II.178}$$

folgt nach Anwendung von $\frac{\partial}{\partial t}$ zunächst

$$1-\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t'}|\underline{x}-\underline{r}(t')|\,\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad . \tag{II.179}$$

Wir substituieren

$$\underline{R} = \underline{x}-\underline{r}(t') \qquad , \qquad R = |\underline{R}| \tag{II.180}$$

und berechnen den rechten Term separat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}R &= \frac{\partial}{\partial R_a}R\cdot\frac{\partial R_a}{\partial t'}\\ &= \frac{R_a}{R}\left(-\frac{\partial r_a(t')}{\partial t'}\right)\\ &= -\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}\,\underline{v}(t') \qquad .\end{aligned} \tag{II.181}$$

Somit folgt

$$1-\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}\cdot\underline{v}(t')\,\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{II.182}$$

und daraus

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\underline{v}(t')}{c}\,\frac{\underline{x}-\underline{r}(t')}{|\underline{x}-\underline{r}(t')|}}=\frac{R}{R-\frac{\underline{v}R}{c}} \tag{II.183}$$

Die Gradientenbildung von t' ergibt

$$-\partial_{\underline{x}}t'(\underline{x},t)=\frac{1}{c}\,\partial_{\underline{x}}\,|\underline{x}-\underline{r}(t'(\underline{x},t))|=\frac{1}{c}\,\partial_{\underline{x}}R \tag{II.184}$$

Für die Brechnung des rechten Terms benutzen wir wiederum die obige R - Substitution und schreiben in Komponenten

$$\partial_{x_a}R=\partial_{R_b}R\,\frac{\partial R_b}{\partial x_a}=\frac{R_b}{R}\,\frac{\partial R_b}{\partial x_a}\qquad . \tag{II.185}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_b}{\partial x_a}=&\frac{\partial x_b}{\partial x_a}-\frac{\partial r_b(t'(\underline{x},t))}{\partial x_a}\\ =&\delta_{ba}-\frac{\partial r_b}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x_a}\\ =&\delta_{ba}-v_b(t')\,\frac{\partial t'}{\partial x_a}\end{aligned} \tag{II.186}$$

und somit

$$\begin{aligned}\partial x_a R=&\frac{R_b}{R}\left(\delta_{ba}-v_b\,\frac{\partial t'}{\partial x_a}\right)\\ \partial x_a R=&\frac{R_a}{R}-\frac{v_b R_b}{R}\,\frac{\partial t'}{\partial x_a}\\ \partial_{\underline{x}}R=&\frac{\underline{R}}{R}-\frac{\underline{v}R}{R}\,\partial_{\underline{x}}t'\qquad .\end{aligned} \tag{II.187}$$

Für $\partial_{\underline{x}}t'$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}-\partial_{\underline{x}}t'=&\frac{1}{cR}\left(\underline{R}-\underline{v}R\,\partial_{\underline{x}}t'\right)\\ \partial_{\underline{x}}t'=&\frac{\underline{R}}{cR}\,\frac{1}{\frac{\underline{v}R}{cR}-1}\\ \partial_{\underline{x}}t'=&-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{R}}{R-\frac{\underline{v}R}{c}}\qquad .\end{aligned} \tag{II.188}$$

Für die spätere Anwendung stellen wir noch eine weitere Beziehung bereit:

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{x}}t'+\frac{\underline{v}}{c^2}\,\frac{\partial t'}{\partial t}=&-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{R}}{R-\frac{\underline{v}R}{c}}+\frac{\underline{v}}{c^2}\,\frac{R}{R-\frac{\underline{v}R}{c}}\\ =&-\frac{1}{c}\,\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{R-\frac{\underline{v}R}{c}}\qquad .\end{aligned} \tag{II.189}$$

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wie die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$. Ausgangspunkt ist

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}} \\
\underline{A} &= \frac{\underline{v}}{c^2}\,\phi
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\underline{R}(t') &= \underline{x}-\underline{r}(t') \\
R(t') &= |\underline{R}(t')| = |\underline{x}-\underline{r}(t')|
\end{aligned} \tag{II.190}$$

und

$$t' = t'(\underline{x},t)$$

implizit gegeben durch

$$t-t' = \frac{1}{c}R(t') \qquad .$$

Zur Berechnung von $\underline{E}$ stellen wir $\partial_{\underline{x}}\phi$ und $\partial_t\underline{A}$ bereit. Der Gradient setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Zum einen durch Differentiation bei festgehaltenem t' und zum anderen durch Differentiation nach dem in t' enthaltenem $\underline{x}$. Dann folgt

$$\partial_{\underline{x}}\phi = \partial_{\underline{x}}\phi\,\Big|_{t'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\,\partial_{\underline{x}}t' \qquad . \tag{II.191}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}\phi\,\Big|_{t'} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\partial_{\underline{x}}\frac{1}{R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}}\,\Big|_{t'} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\partial_{\underline{x}}\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)\Big|_{t'}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{\underline{R}}{R}-\frac{\underline{v}}{c}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2} \\
\partial_{\underline{x}}\phi\,\Big|_{t'} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\,\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2} \qquad .
\end{aligned} \tag{II.192}$$

Weiterhin berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t'} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial t'}\,\frac{1}{R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{\partial}{\partial t'}\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}-\frac{\underline{R}}{c}\,\frac{\partial\underline{v}}{\partial t'}-\frac{\underline{v}}{c}\,\frac{\partial\underline{R}}{\partial t'}\right) \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}\left(\frac{\underline{R}}{R}(-\frac{\partial\underline{r}}{\partial t'})-\frac{\underline{R}\dot{\underline{v}}}{c}-\frac{\underline{v}}{c}(-\frac{\partial\underline{r}}{\partial t'})\right) \\
\frac{\partial\phi}{\partial t'} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}\left(\frac{\underline{v}\underline{R}}{R}+\frac{\dot{\underline{v}}\underline{R}}{c}-\frac{v^2}{c}\right) \qquad .
\end{aligned} \tag{II.193}$$

Die zeitliche Ableitung des Vektorpotentials liefert

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{A} &= \frac{1}{c^2}\partial_t\left(\underline{v}(t')\,\phi(x,t)\right)\\ &= \frac{1}{c^2}\partial_{t'}\left(\underline{v}(t')\,\phi(x,t)\right)\frac{\partial t'}{\partial t}\\ \partial_t \underline{A} &= \frac{1}{c^2}\left(\dot{\underline{v}}\,\phi + \underline{v}\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t} \quad .\end{aligned} \tag{II.194}$$

Das elektrische Feld ergibt dann

$$\begin{aligned}\underline{E} &= -\partial_{\underline{x}}\phi\Big|_{t'} - \frac{\partial\phi}{\partial t'}\partial_{\underline{x}}t' - \frac{1}{c^2}\dot{\underline{v}}\,\phi\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\underline{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\\ \underline{E} &= -\partial_{\underline{x}}\phi\Big|_{t'} - \frac{\partial\phi}{\partial t'}\left(\partial_{\underline{x}}t' + \frac{\underline{v}}{c^2}\frac{\partial t'}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2}\dot{\underline{v}}\,\phi\frac{\partial t'}{\partial t} \quad .\\ \underline{E} &= +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}\\ &\quad -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{\underline{v}\underline{R}}{R}+\frac{\dot{\underline{v}}\underline{R}}{c}-\frac{v^2}{c}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}}\\ &\quad -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\dot{\underline{v}}\frac{1}{R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}}\frac{R}{R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}} \quad .\end{aligned} \tag{II.195}$$

Wir separieren die $\dot{v}$ - Terme und erhalten

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}\frac{\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}+\frac{1}{c}\frac{\left(\frac{\underline{v}\underline{R}}{R}-\frac{v^2}{c}\right)\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\right\}\\ &\quad +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\left(\dot{\underline{v}}\underline{R}\right)\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}-\frac{1}{c^2}\frac{\dot{\underline{v}}R}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^2}\right\}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{1}{R}\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{\underline{v}\underline{R}}{R}-\frac{v^2}{c}\right)\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\ &\quad +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\left(\dot{\underline{v}}\underline{R}\right)\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)-\dot{\underline{v}}R\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(1-\frac{\underline{v}\underline{R}}{cR}+\frac{\underline{v}\underline{R}}{cR}-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\ &\quad +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(\underline{R}\dot{\underline{v}}\right)-\dot{\underline{v}}\left(\underline{R}\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\ \underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\ &\quad +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{R}\times\left(\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\dot{\underline{v}}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3} \quad .\end{aligned} \tag{II.196}$$

Dieser Ausdruck für $\underline{E}$ läßt sich i.a. nicht weiter vereinfachen.

Das magnetische Feld $\underline{B}$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} = \partial_{\underline{x}} \times \left(\frac{\underline{v}(t')}{c^2}\, \phi(\underline{x},t) \right) \\ \underline{B} &= \frac{1}{c^2}\, \phi\, \partial_{\underline{x}} \times \underline{v} + \frac{1}{c^2}\, \partial_{\underline{x}} \phi \times \underline{v}\end{aligned} \tag{II.197}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\left(\partial_{\underline{x}} \times \underline{v}(t') \right)_a &= \varepsilon_{abc}\, \partial_{x_b} v_c = \varepsilon_{abc} \frac{\partial v_c}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_b} \\ \partial_{\underline{x}} \times \underline{v} &= \partial_{\underline{x}} t' \times \dot{\underline{v}}\end{aligned} \tag{II.198}$$

und somit

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \frac{1}{c^2} \phi\, \partial_{\underline{x}} t' \times \dot{\underline{v}} + \frac{1}{c^2} \left(\partial_{\underline{x}} \phi \,\Big|_{t'} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}\, \partial_{\underline{x}} t' \right) \times \underline{v} \\ \underline{B} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ -\frac{1}{c^3} \frac{\underline{R} \times \dot{\underline{v}}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^2} + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{1}{R} \frac{\underline{R} - \frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^2} - \frac{1}{c} \frac{\left(\frac{\underline{v}\underline{R}}{R} + \frac{\dot{\underline{v}}\underline{R}}{c} - \frac{\underline{v}^2}{c} \right) \underline{R}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \right] \times \underline{v} \right\} \quad .\end{aligned} \tag{II.199}$$

Wiederum separieren wir die $\dot{\underline{v}}$ - Terme und erhalten

$$\underline{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \left\{ -\frac{\frac{1}{R}\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right) \left(\underline{R} - \frac{R}{c}\underline{v} \right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\underline{v}\underline{R}}{R} - \frac{\underline{v}^2}{c} \right) \underline{R}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \times \underline{v} - \frac{\frac{1}{c}\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right) \underline{R} \times \dot{\underline{v}} + \frac{\dot{\underline{v}}\underline{R}}{c^2} \underline{R} \times \underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \right\} \quad . \tag{II.200}$$

Einarbeitung von $\underline{v} \times \underline{v} = 0$ liefert

$$\begin{aligned}\underline{B} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\frac{1}{R}\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\underline{v}\underline{R}}{R} - \frac{\underline{v}^2}{c} \right)}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \underline{R} \times \underline{v} + \frac{\frac{1}{c}\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right) \underline{R} \times \dot{\underline{v}} + \frac{1}{c^2} \left(\dot{\underline{v}}\underline{R} \right) \underline{R} + \underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \right\} \\ \underline{B} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2 \left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \left\{ \left(1 - \frac{\underline{v}^2}{c^2} \right) \underline{R} \times \underline{v} + \frac{1}{c} \left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right) \underline{R} \times \dot{\underline{v}} + \frac{1}{c^2} \left(\dot{\underline{v}}\underline{R} \right) \underline{R} \times \underline{v} \right\}\end{aligned} \tag{II.201}$$

Diese Beziehung läßt sich kompakt darstellen in der Form

$$\underline{B} = \frac{1}{c} \frac{\underline{R}}{R} \times \underline{E} \quad . \tag{II.202}$$

Zum Beweis setzen wir $\underline{E}$ ein und zeigen die Übereinstimmung. Zweckmäßigerweise betrachten wir die $\dot{\underline{v}}$ - abhängigen und $\dot{\underline{v}}$ - unabhängigen Terme getrennt. Für die entsprechenden Anteile ist dann folgendes nachzuweisen.
$\dot{\underline{v}}$ - unabhängige Terme:

$$\begin{aligned}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{1 - \frac{\underline{v}^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \underline{R} \times \underline{v} &= \frac{1}{c} \frac{\underline{R}}{R} \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{R} - \frac{R}{c}\underline{v}}{\left(R - \frac{\underline{v}\underline{R}}{c} \right)^3} \left(1 - \frac{\underline{v}^2}{c^2} \right) \\ -\frac{1}{c^2} \underline{R} \times \underline{v} &= \frac{1}{c} \frac{\underline{R}}{R} \times \left(\underline{R} - \frac{R}{c}\underline{v} \right) = -\frac{1}{c^2} \underline{R} \times \underline{v} \qquad \square\end{aligned} \tag{II.203}$$

$\underline{\dot{v}}$ - abhängige Terme:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\frac{1}{c}\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}+\frac{\underline{\dot{v}}\underline{R}}{c^2}\underline{R}\times\underline{v}\right\}\\
&\qquad=\frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\underline{\dot{v}}\right]\right\}\\
&-\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)\underline{R}\times\underline{\dot{v}}-\frac{\underline{\dot{v}}\underline{R}}{c}\underline{R}\times\underline{v}=\frac{1}{R}\underline{R}\times\left\{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)(\underline{R}\underline{\dot{v}})-\underline{\dot{v}}\left[\underline{R}\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\right]\right\}\\
&\qquad=-\frac{\underline{R}\times\underline{v}}{c}(\underline{R}\underline{\dot{v}})-\underline{R}\times\underline{\dot{v}}\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)\qquad\square
\end{aligned}
\tag{II.204}
$$

Damit ist die $\underline{B}$ - Darstellung bestätigt.
Wir fassen die elektromagnetischen Felder einer beliebig bewegten Punktladung zusammen:

$$
\begin{aligned}
&\underline{E}(\underline{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\left\{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\underline{\dot{v}}\right]\right\}\\
&\underline{B}(\underline{x},t)=\frac{1}{c}\frac{\underline{R}}{R}\times\underline{E}\qquad,\\
&\qquad\text{wobei}\quad\underline{R}=\underline{R}(t')=\underline{x}-\underline{r}(t')\quad,\quad R=R(t')=|\underline{R}|\quad,\quad\underline{v}=\underline{v}(t')\quad,\\
&\qquad\text{und}\quad t'=t'(\underline{x},t)\quad\text{ist als Lösung von}\\
&\qquad\qquad t'=t-\frac{R(t')}{c}\\
&\qquad\text{einzusetzen.}
\end{aligned}
\tag{II.205}
$$

Die Feldkonfiguration wird nun diskutiert.

- $\underline{E}\perp\underline{B}$
- Das elektromagnetische Feld besteht aus einem rein geschindigkeitsabhängigem Term und einem Term, der die Beschleunigung des Teilchens enthält.
- Der rein geschwindigkeitsabhängige Term ist proportional $1/R^2$, der $\underline{\dot{v}}$ - Term ist proportional $1/R$ und dominiert daher das Fernfeld.
- Betrachtung der Nahzone

$$
\begin{aligned}
\underline{E}&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\
\underline{B}&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{R}\times\underline{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\qquad.
\end{aligned}
\tag{II.206}
$$

Für $v\ll c$ folgt

$$
\begin{aligned}
\underline{E}&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{R}}{R^3}\\
\underline{B}&=\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{v}\times\underline{R}}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{J}\times\underline{R}}{R^3}\qquad.
\end{aligned}
\tag{II.207}
$$

Das elektrische Feld geht in das einer elektrostatischen Punktladung über; Retardierungseffekte sind wegen $R/c\ll t-t'$ vernachlässigt, woraus $t'\approx t$ folgt. Das magnetische Feld gehorcht *dem Biot - Savart - Gesetz,* das in späteren Kapiteln noch besprochen wird.

- Betrachtung der Fernzone

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\dot{\underline{v}}\right]}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\\ \underline{B} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^3}\frac{1}{R}\frac{\underline{R}\times\left\{\underline{R}\times\left[\left(\underline{R}-\frac{R}{c}\underline{v}\right)\times\dot{\underline{v}}\right]\right\}}{\left(R-\frac{\underline{v}\underline{R}}{c}\right)^3}\end{aligned} \tag{II.208}$$

Für $v \ll c$ folgt

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{R}\times(\underline{R}\times\dot{\underline{v}})}{c^2R^3}\\ \underline{B} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{\underline{v}}\times\underline{R}}{c^3R^2}\end{aligned} \tag{II.209}$$

Es ist zu sehen, daß im Fernfeld für $v \ll c$

$$\begin{aligned}\underline{E}\cdot\underline{B} &= 0\\ \underline{E}\cdot\underline{R} &= 0\\ \underline{B}\cdot\underline{R} &= 0 \qquad .\end{aligned} \tag{II.210}$$

11.3 Berechnung des Poynting - Vektors

Wir schränken die Diskussion auf $v \ll c$ ein und berechnen die Nahzone und Fernzone getrennt.

- Nahzone

$$\begin{aligned}\underline{\Pi} &= \underline{E}\times\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{E}\times\underline{B}\\ &= \frac{1}{\mu_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\underline{R}\times(\underline{v}\times\underline{R})}{R^6}\\ \underline{\Pi} &= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{R^6}\left\{\underline{v}R^2-\underline{R}(\underline{v}\underline{R})\right\}\end{aligned} \tag{II.211}$$

- Fernzone

$$\begin{aligned}\underline{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^5}\frac{[\underline{R}\times(\underline{R}\times\dot{\underline{v}})]\times(\dot{\underline{v}}\times\underline{R})}{R^5}\\ \underline{\Pi} &= \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\frac{\underline{R}(\dot{\underline{v}}\times\underline{R})^2}{R^5} \qquad ,\end{aligned} \tag{II.212}$$

wobei benutzt wurde

$$\begin{aligned}a &:= \dot{\underline{v}}\times\underline{R} \quad , \quad \underline{a}\underline{R} = 0 \quad ,\\ [\underline{R}\times(\underline{R}\times\dot{\underline{v}})]\times(\dot{\underline{v}}\times\underline{R}) &= \underline{a}\times(\underline{R}\times\underline{a}) = \underline{R}a^2-\underline{a}(\underline{a}\underline{R})\\ &= \underline{R}(\dot{\underline{v}}\times\underline{R})^2 \qquad .\end{aligned} \tag{II.213}$$

11.4 Abstrahlung

Der Poynting - Vektor ist bekanntlich die Energieflußdichte. Wir erinnern an die Maßeinheit

$$[\underline{\Pi}] = \frac{J}{m^2s} \qquad . \tag{II.214}$$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde berechnet, daß der Poynting - Vektor

- in der Nahzone Terme proportional $\underline{v}$ und proportional $\underline{R}$ und
- in der Fernzone Terme nur proportional $\underline{R}$

enthält. Wir berechnen nun den gesamten Energiefluß des elektromagnetischen Feldes, der von der bewegten Punktladung ausgeht. Dazu betrachten wir folgende Konfiguration.

- Die Bewegung der Punktladung sei zwar beliebig, aber auf ein endliches Gebiet beschränkt, also

$$|\underline{r}(t')| < l \qquad , \tag{II.215}$$

  wobei l die Ausdehnung der Teilchenbewegung beschreibt. Der Koordinatenursprung 0 liege in dem Gebiet. Die Bewegung sei also z.B. elliptisch.

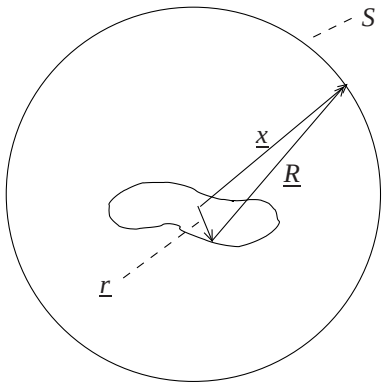
- Wir betrachten eine Kugelsphäre S um das endliche Bewegungsgebiet und definieren den Energiefluß I als Integral des Poynting - Vektors über die Kugelsphäre,

$$I(t) = \oint_S \Pi(\underline{x},t)d\underline{S} \tag{II.216}$$

  Der Energiefluß hat die Maßeinheit

$$[I] = [\Pi]\cdot[\underline{S}] = \frac{J}{m^2 s}\cdot m^2 = \frac{J}{s} = \frac{Ws}{s} = W \quad . \tag{II.217}$$

  Der Energiefluß hat also die Maßeinheit einer Leistung. Er wird auch Intensität genannt.



- Aus dem vorhergehendem Abschnitt übernehmen wir die Näherung $v \ll c$.

Der Energiefluß soll nun durch eine große Kugelsphäre S berechnet werden, also

$$|\underline{x}| >> l > |\underline{r}(t')| \qquad , \tag{II.218}$$

bzw.

$$\underline{x} - \underline{r}(t') = \underline{R}(t') \approx \underline{x} \tag{II.219}$$

mit der Folge, daß

$$\begin{aligned} t - t' &= \frac{1}{c}|\underline{x} - \underline{r}(t')| \approx \frac{1}{c}|\underline{x}| \\ t' &= t - \frac{|\underline{x}|}{c} \quad . \end{aligned} \tag{II.220}$$

Wir wollen hier wieder die bereits im Abschnitt „Multipol - Entwicklung“ benutzte Abkürzung

$$|\underline{x}| = r \tag{II.221}$$

verwenden; man beachte aber, daß hier $r \neq |\underline{r}(t')|$ ist. Dann ist die retardierte Zeit t' ebenso wie im Abschnitt „Multipol - Entwicklung“

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad . \tag{II.222}$$

Wir berechnen zunächst den Energiefluß, der mit der Fernzonen - Lösung des Poynting - Vektors

$$\underline{\Pi}(t') = \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\frac{|\dot{\underline{v}}(t') \times \underline{R}(t')|^2}{R(t')^5}\underline{R}(t') \tag{II.223}$$

einhergeht. Wegen $\underline{x} \approx \underline{R}$ und $r \approx R$ gilt

$$\begin{aligned} d\underline{S} &= r^2 sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi\, \underline{n} \quad , \\ \underline{n} &= \frac{\underline{x}}{r} = \frac{\underline{R}}{R} \quad , \\ d\underline{S} &= r^2 sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi R^2 \frac{\underline{R}}{R} \end{aligned} \tag{II.224}$$

und damit

$$I = \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\, \frac{|\dot{\underline{v}} \times \underline{R}|^2}{R^2} \quad .$$

Für die ϑ - Integration ist es zweckmäßig, die Polarachse in $\dot{\underline{v}}$ - Richtung zu legen, denn dann wird

$$|\dot{\underline{v}} \times \underline{R}| = |\dot{\underline{v}}| R sin\vartheta \tag{II.225}$$

und weiter

$$\begin{aligned} I &= \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\dot{\underline{v}}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta sin^3\vartheta}_{\frac{4}{3}} \\ I &= \frac{q^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\underline{v}}^2 \quad . \end{aligned} \tag{II.226}$$

Mit vollständigen Argumenten liest sich das auch als Larmor-Gleichung bezeichnete Ergebnis

$$I(t) = \frac{q^2\mu_0}{6\pi c}\left\{\dot{\underline{v}}(t')\right\}^2 = \frac{q^2\mu_0}{6\pi c}\left\{\dot{\underline{v}}(t - \frac{r}{c})\right\}^2 \quad . \tag{II.227}$$

Die Intensität der Strahlung ist damit abhängig vom Beschleunigungsquadrat der Teilchenbewegung. Sie ist unabhängig vom Abstand, außer daß die Intensität zur Aufpunktzeit t abhängt von der Beschleunigung des Teilchens zur retardierten Zeit $t - \frac{r}{c}$. $\frac{r}{c}$ ist gerade wieder die Signallaufzeit ziwschen Ursache und Wirkung (Beobachtung).
Die abgeleitete Beziehung ist eine der wichtigsten Formeln der Strahlungstheorie. Ihre Kernaussage ist: *Eine beschleunigte Ladung strahlt elektromagnetische Energie ab.*

Bisher haben wir nur die Fernzonen - Lösung des Poynting - Vektors betrachtet. Der entsprechende Ausdruck für den Nahzonen - Term verschwindet aber. Dies ist leicht zu sehen, denn es gilt

$$\underline{\Pi}\, d\underline{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{R^6}\left\{\underline{v}R^2 - \underline{R}(\underline{v}\underline{R})\right\} R^2 sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi \frac{\underline{R}}{R} \quad . \tag{II.228}$$

Damit folgt

$$\left\{\underline{v}R^2 - \underline{R}(\underline{v}\underline{R})\right\}\underline{R} = (\underline{v}\underline{R})R^2 - R^2(\underline{v}\underline{R}) = 0 \quad . \tag{II.229}$$

q.e.d.

Damit kann die obige Kernaussage noch straffer gefaßt werden: Eine Ladung strahlt genau dann elektromagnetische Energie ab, wenn sie beschleunigt wird.

Bemerkung:

Offensichtlich steht eine beschleunigte Ladung unter dem Einfluss des elektromagnetischen Feldes, das sie selbst erzeugt. Nun ist es naheliegend, dass die abgestrahlte Energie aus der kinetischen Energie entnommen wird und das Teilchen somit langsamer wird. Ohne Ableitung geben wir an, dass auch Lösungen existieren, die eine Selbstbeschleunigung des Teilchens beschreiben und zu einem zeitlich exponentiellen Wachstum der Beschleunigung führen. Für ein Elektron beträgt die charakteristische Zeit $6 \cdot 10^{24}$s. Diese Lösung ist offensichtlich unsinnig und ist auszuschliessen. Die Strahlungsreaktionskraft wird beschrieben durch die Abraham-Lorentz-Formel.

11.5 Beispiele für strahlende Ladung

- Kreisbewegung
- Hertzscher Dipol

s. Übungsaufgaben.

12 Elektromagnetische Wellen

In diesem Abschnitt werden freie Wellen als Lösung der homogenen Wellengleichung betrachtet. Quellen sind nicht anwesend, d.h. $\rho = 0$, $\underline{j} = 0$. Wir beschränken uns auf einfache Wellen und einfache Medien — dies sind aber auch die wichtigsten Fälle.

12.1 Ebene Wellen in homogenen und isotropen Isolatoren

ε und μ sind ortsunabhängige Skalare und die Leitfähigkeit verschwindet ($\sigma = 0$). Die Gleichungen für die Potentiale in Lorentz-Eichung lauten dann

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \partial_t^2 \underline{A} = 0 \tag{II.230}$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \partial_t^2 \Phi = 0 \quad . \tag{II.231}$$

Da beide Gleichungen die gleiche Form haben, werden die Rechnungen exemplarisch für eine beliebige Komponente — genannt Ψ — vorgeführt.

$$\text{Ansatz:} \qquad \Psi(\underline{x}, t) = \Psi(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t) \quad . \tag{II.232}$$

Die zum Ansatz gebrachten Parameter haben folgende Bedeutungen:

$\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t$	Wellenphase
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz (f: Frequenz)
$\underline{k}$	Wellenvektor der Welle mit $k = \lvert \underline{k} \rvert = \dfrac{2\pi}{\lambda}$,

wobei λ die Wellenlänge ist.

Diese Größen sind zunächst frei angesetzt. Einsetzen in die Wellengleichung bringt sie in einen gewissen Zusammenhang. Es folgt

$$\left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \right) \Psi'' = 0 \quad . \tag{II.233}$$

Ein Strich am Ψ bedeutet die Ableitung nach dem gesamten Argument, also nach der Wellenphase. Die Gleichung läßt sich nur erfüllen, wenn der linke Klammerausdruck verschwindet. Die resultierende Formel

$$\omega^2 = c_{\mathrm{Ph}}^2 \underline{k}^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \pm c_{\mathrm{Ph}} k =: \pm \omega_0 \tag{II.234}$$

heißt Dispersionsrelation.

Bemerkung: In komplizierteren Medien wird auch die Dispersionsrelation komplizierter. Ihre allgemeine Form ist

$$\omega = \omega(\underline{k}) \quad . \tag{II.235}$$

Die allgemeine Lösung hat dann die Form

$$\Psi = \Psi_1(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega_0 t) + \Psi_2(\underline{k} \cdot \underline{x} + \omega_0 t) \quad . \tag{II.236}$$

Ψ_1 und Ψ_2 sind beliebige Funktionen. Das Auftreten von Anteilen mit Wellenphasen, die sich durch $\pm\omega_0$ unterscheiden, ergibt sich aus der Invarianz der Ausgangsgleichungen gegenüber der Substitution $c_{\mathrm{Ph}} \to -c_{\mathrm{Ph}}$.

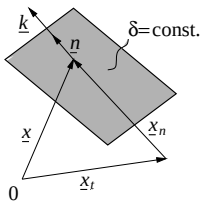
Die Lösungen Ψ_1, Ψ_2 heißen **ebene Wellen**. Die Bezeichnung leitet sich aus der Form der Phasenfläche ab. Für eine willkürlich herausgegriffene konstante Wellenphase δ gilt (etwa für Ψ_1)

$$\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega_0 t=\delta=const. \tag{II.237}$$

bzw.

$$\underline{k}\cdot\underline{x}=\delta+\omega_0 t \quad . \tag{II.238}$$

Für jeden Zeitpunkt t beschreibt diese Beziehung eine Ebene. Führen wir den Einheitsvektor $\underline{n}=\underline{k}/k$ und die Abkürzung $p=(\delta+\omega_0 t)/k$ ein, so kann man die Ebenen-Gleichung (II.238) in die Hessesche Normalform überführen:



$$\underline{n}\cdot\underline{x}=p \quad . \tag{II.239}$$

Den die Ebene abtastenden Ortsvektor $\underline{x}$ spalten wir in einen Anteil $\underline{x}_t$ tangential und $\underline{x}_n$ normal zur Ebene auf. Dann folgt

$$\underline{k}\cdot\underline{x}=\underline{k}\cdot\underline{x}_n=k\cdot x_n=\delta+\omega_0 t$$

oder

$$x_n=\frac{\delta}{k}+c_{\mathrm{Ph}}t \quad . \tag{II.240}$$

Im Verlaufe der Zeit bewegt sich die Phasenebene mit der Geschwindigkeit $+c_{\mathrm{Ph}}$ in Richtung des Wellenvektors $\underline{k}$.

Für Ψ_2 ist $c_{\mathrm{Ph}}\rightarrow -c_{\mathrm{Ph}}$ zu ersetzen und die Ausbreitungsrichtung ist $-\underline{k}$.

Wir wollen nun das elektrische und magnetische Feld ebener Wellen untersuchen. Unser Ausgangspunkt waren die homogenen Potentialgleichungen, die äquivalent für die Maxwell-Gleichungen ohne Quellen stehen. Von den Potentialen gelangt man durch Differentiationen zu $\underline{E}$ und $\underline{B}$. Die Differentiationen sind aber unschädlich für den raum-zeitlichen Zusammenhang, so daß sich für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ ebenfalls die funktionale Abhängigkeit

$$\underline{E}(\underline{x},t)=\underline{E}(\underline{k}\underline{x}-\omega t) \quad , \tag{II.241}$$

$$\underline{B}(\underline{x},t)=\underline{B}(\underline{k}\underline{x}-\omega t) \tag{II.242}$$

ergibt. Ausnutzen der Dispersionsrelation modifiziert $\underline{E}$ und $\underline{B}$ zu

$$\underline{E}(\underline{x},t)=\underline{E}(\underline{n}\underline{x}\mp c_{\mathrm{Ph}}t) \quad , \tag{II.243}$$

$$\underline{B}(\underline{x},t)=\underline{B}(\underline{n}\underline{x}\mp c_{\mathrm{Ph}}t) \quad . \tag{II.244}$$

Einsetzen in das Induktions- und Durchflutungsgesetz ergibt

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{E}=-\underline{E}'\times\partial_{\underline{x}}(\underline{n}\underline{x}\mp c_{\mathrm{Ph}}t)=-\underline{E}'\times\underline{n}=\underline{n}\times\underline{E}'$$
$$\partial_t\underline{B}=\mp c_{\mathrm{Ph}}\underline{B}'$$

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}=\frac{1}{\mu\mu_0}\underline{n}\times\underline{B}'$$
$$\partial_t\underline{D}=\mp\varepsilon_0\varepsilon c_{\mathrm{Ph}}\underline{E}'$$

und damit

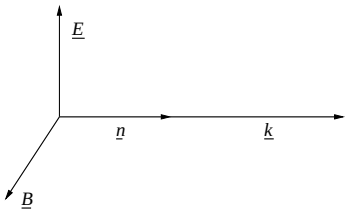
$$\underline{n}\times\underline{E}'=\pm c_{\mathrm{Ph}}\underline{B}' \tag{II.245}$$

$$\underline{n}\times\underline{B}'=\mp\frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}}\underline{E}' \quad . \tag{II.246}$$

Die Differentiation nach der gesamten Phase $()'$ kann abintegriert werden; die entstehenden Integrationskonstanten sind Gleichfeldanteile, die wir Null setzen, da sie für die Wellenbetrachtungen ohne Belang sind:

$$\underline{B} = \pm\frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}}\underline{n}\times\underline{E} \quad , \tag{II.247}$$

$$\underline{E} = \mp c_{\mathrm{Ph}}\underline{n}\times\underline{B} \quad . \tag{II.248}$$



Skalare Multiplikation mit $\underline{n}$ oder $\underline{k}$ liefert

$$\underline{E}\cdot\underline{n} = 0 \quad , \quad \underline{B}\cdot\underline{n} = 0 \quad ,$$

d.h. ebene Wellen sind **transversal polarisiert** (im betrachteten Medium).

Ein wichtiger Spezialfall der ebenen Welle ist die harmonische Welle:

$$\underline{E} = \underline{E}_1\cdot\cos(\underline{k}\underline{x} - \omega_0 t + \varphi_1) + \underline{E}_2\cdot\cos(\underline{k}\underline{x} + \omega_0 t + \varphi_2) \quad . \tag{II.249}$$

Bequemer ist häufig die komplexe Schreibweise

$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega_0 t + \varphi_1)} + \underline{E}_2 e^{i(\underline{k}\underline{x} + \omega_0 t + \varphi_2)} \quad . \tag{II.250}$$

Bei der komplexen Schreibweise ist jedoch darauf zu achten, daß nur der Realteil von $\underline{E}$ eine physikalische Bedeutung hat.

12.2 Kugelwellen in homogenen und isotropen Isolatoren

Wir betrachten eine homogene Wellengleichung für eine beliebige Feldkomponente Ψ:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\Psi = 0 \quad . \tag{II.251}$$

Den Laplace-Operator schreiben wir jetzt in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\Psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\Psi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Psi - \frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\Psi = 0 \quad . \tag{II.252}$$

Wir suchen nun Lösungen der Form

$$\Psi = \frac{\tilde{\Psi}(kr - \omega t)}{r} \quad , \tag{II.253}$$

die insbesondere nicht von ϑ und φ abhängen. Dann gilt

$$\partial_r\Psi = \frac{\tilde{\Psi}'\cdot kr - \tilde{\Psi}}{r^2} \quad ,$$

$$\partial_r\left(r^2\partial_r\Psi\right) = \tilde{\Psi}''\cdot k^2 r + \tilde{\Psi}'\cdot k - \tilde{\Psi}'\cdot k \quad .$$

Folglich

$$k^2\frac{\tilde{\Psi}''}{r} - \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\frac{\tilde{\Psi}''}{r} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\right)\frac{\tilde{\Psi}''}{r} = 0 \quad .$$

Um diese Gleichungen erfüllen zu können, ist eine analoge Dispersionsrelation

$$\omega^2 = c_{\mathrm{Ph}}^2 k^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \pm c_{\mathrm{Ph}} k \equiv \pm\omega_0 \tag{II.254}$$

einzuhalten. Die allgemeine Lösung ist nun

$$\Psi = \frac{1}{r}\Psi_1(kr-\omega_0 t)+\frac{1}{r}\Psi_2(kr+\omega_0 t) \quad . \tag{II.255}$$

Die Flächen gleicher Wellenphasen sind sowohl für $\frac{\Psi_1}{r}$ als auch für $\frac{\Psi_2}{r}$ Kugeloberflächen. $\frac{\Psi_1}{r}$ beschreibt eine auslaufende und $\frac{\Psi_2}{r}$ eine einlaufende Kugelwelle. Eine Ausbreitungsrichtung wie bei ebenen Wellen existiert hier nicht. Die Kugeloberflächen breiten sich isotrop aus. Für den Normalenvektor der Phasenflächen ergibt sich

$$\partial_{\underline{x}}(kr-\omega_0 t) = k\cdot\partial_{\underline{x}} r = k\frac{\underline{x}}{r} = k\cdot\underline{e}_r \quad . \tag{II.256}$$

Spezialfall harmonische Kugelwelle:

$$\Psi = \frac{\hat{\Psi}_1}{r}\cdot e^{i(kr-\omega_0 t+\varphi_1)}+\frac{\hat{\Psi}_2}{r}\cdot e^{i(kr+\omega_0 t+\varphi_2)} \quad . \tag{II.257}$$

12.3 Ebene Wellen in homogenen und isotropen Leitern

Zwar soll auch hier von außen kein Quellstrom angelegt sein, aber im Unterschied zu Isolatoren verschwindet nun die Leitfähigkeit des Mediums nicht mehr. In die Grundgleichungen ist somit das Ohmsche Gesetz

$$\underline{j} = \sigma\underline{E} \tag{II.258}$$

einzuarbeiten, wodurch das elektrische Feld $\underline{E}$ selbständig einen Strom induziert. Dazu gehen wir von den Gleichungen für die Potentiale aus und benutzen hier vorteilhafterweise die Coulomb-Eichung; dann gilt

$$\Delta\underline{A}-\frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A} = -\mu_0\mu\,\underline{j}_T \quad , \tag{II.259}$$

$$\Delta\Phi = 0 \quad . \tag{II.260}$$

Transversale Ströme müssen jetzt zugelassen werden, Ladungsdichten treten aber nicht auf. Wir können somit $\Phi = 0$ als Lösung annehmen. Somit treten auch keine longitudinalen Ströme $\underline{j}_L$ auf. Dann folgt

$$\begin{aligned}\underline{E} &= -\partial_t\underline{A} \quad ,\\ \underline{j} = \underline{j}_T &= \sigma\underline{E} = -\sigma\partial_t\underline{A}\end{aligned} \tag{II.261}$$

und weiter

$$\Delta\underline{A}-\frac{1}{c_{\mathrm{Ph}}^2}\partial_t^2\underline{A}-\mu_0\mu\sigma\partial_t\underline{A} = 0 \quad . \tag{II.262}$$

Wir suchen Lösungen vom Typ harmonischer ebener Wellen:

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \hat{\underline{A}}\cdot e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} \quad . \tag{II.263}$$

Einsetzen liefert

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2}+i\omega\mu_0\mu\sigma\right)\hat{\underline{A}} = 0 \quad . \tag{II.264}$$

Die Dispersionsrelation

$$k^2-\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2}-i\omega\mu_0\mu\sigma = 0 \tag{II.265}$$

ist nun schon etwas komplizierter geworden. Während wir in den vorangegangenen Abschnitten $\omega(k)$ bestimmt haben, diskutieren wir jetzt $k(\omega)$. Die Lösung für k ist offensichtlich komplex. Trennung in Real- und Imaginärteil $k = k_r + ik_i$ ergibt

$$k_r^2-k_i^2 = \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \quad , \quad 2k_rk_i = \omega\mu_0\mu\sigma \tag{II.266}$$

woraus weiter

$$k_r^2 - \frac{(\omega\mu_0\mu\sigma)^2}{4k_r^2} = \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \quad ,$$

$$k_r^4 - \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2}k_r^2 - \left(\frac{\omega\mu_0\mu\sigma}{2}\right)^2 = 0 \quad ,$$

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{2c_{\mathrm{Ph}}^2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{\omega^4}{4c_{\mathrm{Ph}}^4} + \left(\frac{\omega\mu_0\mu\sigma}{2}\right)^2} \quad ,$$

$$k_r = \underset{-}{+}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega}{c_{\mathrm{Ph}}}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu_0\mu\sigma c_{\mathrm{Ph}}^2}{\omega}\right)^2}} \qquad \text{(II.267)}$$

sowie

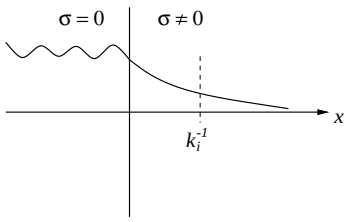
$$k_i^2 = k_r^2 - \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{Ph}}^2} \quad ,$$

$$k_i^2 = -\frac{\omega^2}{2c_{\mathrm{Ph}}^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4c_{\mathrm{Ph}}^4} + \left(\frac{\omega\mu_0\mu\sigma}{2}\right)^2} \quad ,$$

$$k_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega}{c_{\mathrm{Ph}}}\sqrt{-1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu_0\mu\sigma c_{\mathrm{Ph}}^2}{\omega}\right)^2}} \quad . \qquad \text{(II.268)}$$

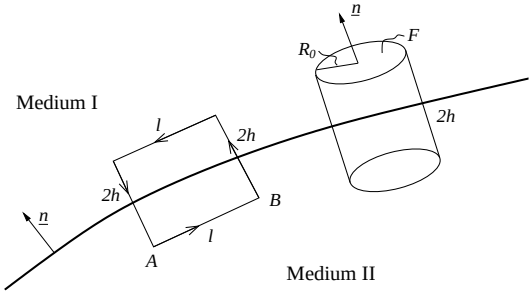
Die oben angegebene Formel für $k_r(\omega)$ beschreibt eine nichttriviale metallische Dispersion. k_i ist ein frequenzabhängiger Absorptionskoeffizient. Sei $\underline{n} = \underline{k}/k$ der Einheitsvektor der Wellenausbreitungsrichtung, dann gilt

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \hat{\underline{A}}e^{i(k_r\cdot\underline{n}\underline{x}-\omega t)}e^{-k_i\cdot\underline{n}\underline{x}} \quad . \qquad \text{(II.269)}$$



Die Größe k_i^{-1} ist damit eine Skinlänge (Eindringtiefe). Für wachsende ω wird die Eindringtiefe geringer. Die Felder werden an die Oberfläche eines Leiters gedrängt (=**Skin-Effekt**).

13 Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes und der Stromdichte



Zwei Medien sind an einer Grenzfläche in Kontakt. Wir berechnen die Übergangsbedingungen für die elektromagnetischen Größen.
MAXWELL-GLEICHUNGEN:

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} &= \partial_t \underline{D} + \underline{j} & \partial_{\underline{x}} \underline{D} &= \rho \\ \partial_{\underline{x}} \times \underline{E} &= -\partial_t \underline{B} & \partial_{\underline{x}} \underline{B} &= 0 \\ \underline{j} &= \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{E} + \rho \underline{v} \end{aligned}$$

Ziel ist es, die Gleichungen geeignet über das Quasi-Rechteck und über den Quasi-Zylinder zu integrieren. Danach wird der Limes $h \to 0$ ausgeführt und die Betrachtung unmittelbar auf die Grenzfläche reduziert.
Vorbereitend führen wir die Flächenladungsdichte ρ_S und die Flächenstromdichte j_S ein:

$$\begin{aligned} \rho_S &:= \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} \rho \, dh \qquad , \\ j_S &:= \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} \left(\underline{j}\right)_S dh \end{aligned} \tag{II.270}$$

Der Index S bei $\left(\underline{j}\right)_S$ markiert die Komponente senkrecht zum Quasi-Rechteck. Die Flächenstromdichte wird umgeformt vermöge

$$j_S = \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} (\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{E})_S \, dh + \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} \left(\underline{j}^{(cv)}\right)_S dh \qquad . \tag{II.271}$$

Der erste rechte Term verschwindet jedoch, da $\underline{\underline{\sigma}}$ und $\underline{E}$ als physikalische Größen beschränkt sind. Die Flächenstromdichte kann somit nur konvektive Anteile enthalten. Wegen

$$\left(\underline{j}^{(cv)}\right)_S = \rho \, v_S \tag{II.272}$$

schreiben wir

$$j_S = \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} \rho \, v_S \, dh = \rho_S v_S \tag{II.273}$$

mit der entsprechenden Konvektionsgeschwindigkeit v_S der Flächenladungen.
Anwendung des Stokesschen Satzes auf den Quasi-Rechteckbereich:

(a)

$$\begin{aligned} \int_{\text{Rechteck}} \partial_{\underline{x}} \times \underline{H} \, d\underline{S} &= \oint_{\text{Rand}} \underline{H} \, d\underline{x} \\ &= \left(H_t^{II,AB} - H_t^{I,AB}\right) \cdot l + \left(H_n^{II,B} - H_n^{II,A}\right) \cdot h + \left(H_n^{I,B} - H_n^{I,A}\right) \cdot h \\ &= \int_{\text{Rechteck}} (\partial_t \underline{D} + \underline{j}) d\underline{S} \\ &= \int_{\text{Rechteck}} \partial_t \underline{D} \, d\underline{S} + l \int_{-h}^{h} \left(\underline{j}\right)_S dh \qquad . \end{aligned}$$

$\partial_t \underline{D}$ kann hier nicht unbedingt als stetig im gesamten Rechteck angenommen werden, Stetigkeit liegt jedoch stückweise innerhalb der Gebiete I und II vor. Wir zerlegen das Integrationsgebiet in die Teilbereiche I und II und wenden je den Mittelwertsatz an:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\text{Rechteck}} \partial_t \underline{D}\, d\underline{S} &= \int\limits_{\text{Teilrechteck I}} \partial_t \underline{D}\, d\underline{S} + \int\limits_{\text{Teilrechteck II}} \partial_t \underline{D}\, d\underline{S} \\ &= \overline{\left(\partial_t \underline{D}^I\right)_S} \quad l \cdot h + \overline{\left(\partial_t \underline{D}^{II}\right)_S} \quad l \cdot h \quad .\end{aligned} \tag{II.274}$$

Mit der Definition

$$\overline{(\partial_t \underline{D})_S} := \tfrac{1}{2} \left\{ \overline{\left(\partial_t \underline{D}^I\right)_S} + \overline{\left(\partial_t \underline{D}^{II}\right)_S} \right\} \tag{II.275}$$

erhält man

$$\int\limits_{\text{Rechteck}} \partial_{\underline{x}} \times \underline{H}\, d\underline{S} = \overline{(\partial_t \underline{D})_S} \quad 2hl + l \int\limits_{-h}^{h} \left(\underline{j}\right)_S dh \quad . \tag{II.276}$$

$\overline{(\partial_t \underline{D})_S}$ ist als physikalische Größe jedoch beschränkt. Ausführen des Grenzüberganges $h \to 0$ ergibt:

$$H_t^{II,AB} - H_t^{I,AB} = \rho_s v_s \quad .$$

Insbesondere gilt für verschwindende Flächenladungsdichte ($\rho_s = 0$)

$$H_t^I = H_t^{II} \quad .$$

Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke geht stetig über, wenn keine Flächenladungsdichte vorliegt.

(b)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\text{Rechteck}} \partial_{\underline{x}} \times \underline{E}\, d\underline{S} &= \oint\limits_{\text{Rand}} \underline{E}\, d\underline{x} \\ &= \left(E_t^{II,AB} - E_t^{I,AB}\right) \cdot l + \left(E_n^{II,B} - E_n^{II,A}\right) \cdot h + \left(E_n^{I,B} - E_n^{I,A}\right) \cdot h \\ &= - \int\limits_{\text{Rechteck}} \partial_t \underline{B}\, d\underline{S} \\ &= - 2hl\, \overline{(\partial_t \underline{B})_S} \quad ,\end{aligned} \tag{II.277}$$

wobei der Mittelwertansatz analog zu obigen Überlegungen angewandt wurde. Hier liefert $h \to 0$:

$$E_t^I = E_t^{II} \quad .$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes geht stetig über.

Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf den Quasi-Zylinder ergibt folgendes:

(c)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\text{Zylinder}} \partial_{\underline{x}} \underline{D}\, dV &= \oint \underline{D}\, d\underline{S} \\ &= \left(D_n^I - D_n^{II}\right) \cdot F \\ &\quad + 2h \cdot 2\pi \cdot R_0 \cdot \overline{D}_t \\ &= \int\limits_{\text{Zylinder}} \rho\, dV \\ &= F \int\limits_{-h}^{h} \rho\, dh\end{aligned} \tag{II.278}$$

Grenzwert $h \to 0$ ergibt:

$$D_n^I - D_n^{II} = \rho_s \quad . \tag{II.279}$$

Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung geht bei verschwindender Flächenladungsdichte ($\rho_s = 0$) stetig über, ansonsten beträgt der Sprung gerade ρ_s.

(d)

$$\begin{aligned}\int \partial_{\underline{x}} \underline{B}\, dV &= \oint \underline{B} d\underline{S} \\ &= \left(B_n^I - B_n^{II}\right) \cdot F \\ &\quad + 2h \cdot 2\pi \cdot R_0 \cdot \overline{B}_t \\ &= 0 \quad .\end{aligned} \tag{II.280}$$

Für $h \to 0$ ergibt sich daraus:

$$B_n^I = B_n^{II} \quad . \tag{II.281}$$

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion ist stetig.

(e)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\text{Zylinder}} \partial_{\underline{x}} \underline{j}\, dV &= \oint \underline{j}\, d\underline{S} \\ &= \left(j_n^I - j_n^{II}\right) \cdot F \\ &\quad + \oint\limits_{\text{Mantel}} \underline{j}\, d\underline{S} \\ &= -\partial_t \int \rho\, dV \\ &= -\partial_t \int\limits_{-h}^{h} \rho\, dh \cdot F\end{aligned} \tag{II.282}$$

Weiterhin kann unterteilt werden in:

$$\oint\limits_{\text{Mantel}} \underline{j}\, d\underline{S} = \oint\limits_{\text{Mantel}} \underline{j}^{(cd)} d\underline{S} + \oint\limits_{\text{Mantel}} \underline{j}^{(cv)} d\underline{S} \tag{II.283}$$

Im Grenzübergang $h \to 0$ ergibt der konduktive Strom $\underline{j}^{(cd)} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{E}$ generell keinen Anteil, da sowohl $\underline{\underline{\sigma}}$ als auch $\underline{E}$ endlich bleiben.

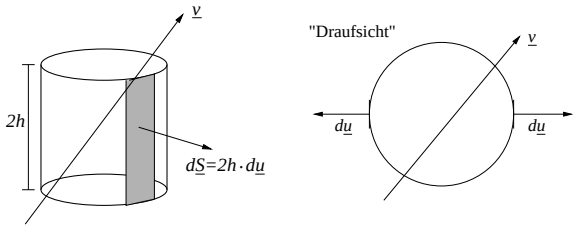
Für den konvektiven Anteil

$$\oint\limits_{\text{Mantel}} \underline{j}^{(cv)} d\underline{S} = \oint\limits_{\text{Mantel}} \rho \cdot \underline{v}\, d\underline{S}$$

unterteilen wie die Mantelfläche in Streifen, so daß

$$d\underline{S} = 2h \cdot d\underline{u}$$

gilt.



Das Linienelement des Umfangs $d\underline{u}$ ist nach außen gerichtet, da

$d\underline{u} \parallel d\underline{S}$ gilt. Bei der $d\underline{u}$-Integration heben sich gegenüberliegende Anteile weg.

Somit gilt

$$\lim_{h\to 0}\int \rho \underline{v}\, d\underline{S} = \lim_{h\to 0}\int \rho \underline{v}\, 2h\, d\underline{u} = \rho_S \int \underline{v}\, d\underline{u} = 0 \quad .$$

Es verbleibt

$$j_n^{II} - j_n^I = \partial_t \rho_S \quad . \tag{II.284}$$

Die Normalkomponente des Stromes geht stetig über, wenn die Flächenladung konstant ist.

(f) Übergangsbedingungen für die Potentiale

Die Felder

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\partial_t \underline{A} - \partial_{\underline{x}} \phi, \\ \underline{B} &= \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \end{aligned} \tag{II.285}$$

dürfen nicht divergieren. Die Potentiale müssen somit stetig sein:

$$\phi^I = \phi^{II} \tag{II.286}$$

$$\underline{A}^I = \underline{A}^{II}. \tag{II.287}$$

14 Elektromagnetische Kraft und Drehmoment

Um die in diesem Abschnitt auftretenden Größen und Beziehungen übersichtlich darstellen und kompakt handhaben zu können, führen wir für die Vektoren und ihre räumliche Ableitungen eine spezielle Komponentenschreibweise ein:

Indizes, die die Vektorkomponenten des 3-dim. Raumes ansprechen, bezeichnen wir lateinisch mit:

$$a, b, c, .., h = 1, 2, 3 \quad .$$

Ein Vektor $\underline{j}$ hat die Komponenten j_a:

$$\underline{j} = j_a = (j_1, j_2, j_3) \quad .$$

Für eine räumliche Ableitung eines skalaren Feldes $Z(\underline{x})$ schreiben wir.

$$\partial_{x_a} Z \equiv Z_{,a} = \partial_{\underline{x}} Z \quad .$$

Analoges gilt für die Komponenten eines Vektorfeldes $\underline{Z}(\underline{x})$:

$$\partial_{x_a} Z_b = Z_{b,a}$$

ist gleichbedeutend mit

$$\underline{Z}_{,a} \quad .$$

Die Einsteinsche Summenkonvektion: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Das heißt zum Beispiel:

$$Z_{a,a} = Z_{1,1} + Z_{2,2} + Z_{3,3} = \partial_{x_1} Z_1 + \partial_{x_2} Z_2 + \partial_{x_3} Z_3 = \partial_{\underline{x}} \underline{Z}$$

oder

$$x_a\, y_a = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 = \underline{x} \cdot \underline{y} \quad .$$

Bemerkung: Später benötigen wir die Indizes $i, j, k, \ldots$. Diese laufen von 1 bis 4 (z.B. $dx_i\ dx_i = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$).

Wichtige Größen:

δ-Tensor (Einheitstensor):

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \qquad \delta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.288}$$

ε-Tensor (vollständig antisymmetrischer Einheitstensor):

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 0 & a = b \text{ oder } a = c \text{ oder } b = c \\ 1 & a, b, c \text{ gerade Permutation von 1, 2, 3} \\ -1 & a, b, c \text{ ungerade Permutation von 1, 2, 3} \end{cases} \tag{II.289}$$

Zum Beispiel $\varepsilon_{113} = 0$, $\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{132} = -1$, $\varepsilon_{312} = 1$ usw.

Abgeleitete Regeln:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \tag{II.290}$$
$$\delta_{aa} = 3 = \text{Spur}(\underline{\underline{\delta}}) \tag{II.291}$$
$$\delta_{ab}\delta_{bc} = \delta_{ac} \tag{II.292}$$
$$\varepsilon_{abc} = -\varepsilon_{bac} \tag{II.293}$$
$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{dc} \tag{II.294}$$
$$(\underline{A} \times \underline{B})_a = \varepsilon_{abc} A_b B_c \tag{II.295}$$
$$\left(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}\right)_a = \varepsilon_{abc} A_{c,b} \tag{II.296}$$

14.1 Elektromagnetische Kraftdichte

Die elektromagnetische Kraftdichte setzt sich zusammen aus der **Lorentz-Kraftdichte**

$$k_a^L = \rho E_a + \left(\underline{j} \times \underline{B}\right)_a \tag{II.297}$$

und der **Inhomogenitäts-Kraftdichte**

$$k_a^I = \frac{1}{2}\left(\underline{B} \cdot \underline{H}_{,a} - \underline{H} \cdot \underline{B}_{,a} + \underline{D} \cdot \underline{E}_{,a} - \underline{E} \cdot \underline{D}_{,a}\right) \quad , \tag{II.298}$$

die die Gesamt-Kraftdichte

$$k_a = k_a^L + k_a^I \tag{II.299}$$

ergeben. Die Inhomogenitäts-Kraftdichte läßt sich mittels Polarisation und Magnetisierung umschreiben. Wir verwenden

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \cdot \underline{E} + \underline{P}$$
$$\underline{H} = \kappa_0 \cdot \underline{B} - \underline{M} \qquad \kappa_0 = \frac{1}{\mu_0}$$

und ersetzen entsprechend. Es folgt

$$\begin{aligned} k_a^I = &\frac{1}{2}\left(\kappa_0 \underline{B} \cdot \underline{B}_{,a} - \underline{B} \cdot \underline{M}_{,a} - \kappa_0 \underline{B} \cdot \underline{B}_{,a} + \underline{M} \cdot \underline{B}_{,a}\right. \\ &\left. + \varepsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E}_{,a} + \underline{P} \cdot \underline{E}_{,a} - \varepsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E}_{,a} - \underline{E} \cdot \underline{P}_{,a}\right) \quad , \\ k_a^I = &\frac{1}{2}\left(\underline{M} \cdot \underline{B}_{,a} - \underline{B} \cdot \underline{M}_{,a} + \underline{P} \cdot \underline{E}_{,a} - \underline{E} \cdot \underline{P}_{,a}\right) \quad . \end{aligned} \tag{II.300}$$

Wir leiten noch eine andere Formel für k^I ab, die in einem isotropen und linearen Medium gilt. Wir verwenden hier:

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H}, \qquad \underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} k_a^I =& \frac{1}{2} \big(\mu_0 \mu \underline{H} \cdot \underline{H}_{,a} - \underline{H} \cdot \mu_0 \mu \cdot \underline{H}_{,a} - \underline{H} \cdot \mu_0 \mu_{,a} \cdot \underline{H} \\ & + \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}_{,a} - \underline{E} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \underline{E}_{,a} - \underline{E} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_{,a} \cdot \underline{E} \big) \\ \Longrightarrow \quad \underline{k}^I =& -\frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 \partial_{\underline{x}} \varepsilon + \mu_0 \underline{H}^2 \partial_{\underline{x}} \mu \right) \quad . \end{aligned} \tag{II.301}$$

Kraft auf eine Punktladung e am Ort $\underline{x}_0(t)$ im Vakuum

Die Ladungsdichte hat die Form

$$\rho(\underline{x},t) = e\delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \quad . \tag{II.302}$$

Die Bewegung der Ladung erzeugt eine konvektive Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t) = e\delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \cdot \underline{v}(x,t) \quad . \tag{II.303}$$

Zur Kraftdichte trägt hier nur der Lorentz-Term bei, und es ergibt sich

$$\underline{k}^L = e\delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big)\underline{E}(\underline{x},t) + e\delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \cdot \underline{v}(\underline{x},t) \times \underline{B}(\underline{x},t) \quad . \tag{II.304}$$

Volumen-Integration liefert die Kraft

$$\begin{aligned} \underline{K}^L =& \int \underline{k}^L dV \\ \underline{K}^L =& e \int \delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big)\underline{E}(\underline{x},t) \; dV + e \int \delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big)\underline{v}(\underline{x},t) \times \underline{B}(x,t) \; dV \\ \underline{K}^L =& e\underline{E}(x_0,t) + e\underline{v}(\underline{x}_0,t) \times \underline{B}(\underline{x}_0,t) \quad , \end{aligned} \tag{II.305}$$

die als Lorentz-Kraft bekannt ist.

Kraft auf einen Punkt-Dipol im Vakuum

Exemplarisch betrachten wir einen punktförmigen magnetischen Dipol. Er sei charakterisiert durch sein magnetisches Dipolmoment $\underline{m}(t)$. Der Dipol befindet sich am Ort $\underline{x}_0(t)$. Die Magnetisierung ist dann:

$$\underline{M}(\underline{x},t) = \underline{m}(t) \; \delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \quad . \tag{II.306}$$

Ladungs- oder Stromdichten werden von einem Dipol nicht erzeugt, so daß nur die Inhomogenitäts-Kraft-Dichte wirksam werden kann. Aus:

$$k_a^I = \frac{1}{2}(\underline{M}\underline{B}_{,a} - \underline{B}\underline{M}_{,a})$$

folgt

$$k_a^{mD} = \frac{1}{2}\Big[\underline{m}(t) \cdot \delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \cdot \partial_{x_a}\underline{B}(\underline{x},t) - \underline{B}(\underline{x},t) \cdot \underline{m}(t) \cdot \partial_{x_a}\delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big)\Big] \quad . \tag{II.307}$$

Volumenintegration ergibt die Kraft

$$\begin{aligned} K_a^{mD} =& \int k_a^{mD} \; dV \\ =& \frac{1}{2}\Big(\underline{m}(t) \cdot \int \delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \cdot \partial_{x_a}\underline{B}(\underline{x},t) \; dV \\ & - \underline{m}(t) \int \underline{B}(\underline{x},t) \cdot \partial_{x_a}\delta\big(\underline{x} - \underline{x}_0(t)\big) \; dV\Big) \end{aligned}$$

Den die Ableitung der δ-Funktion enthaltenden Summanden integrieren wir partiell und erhalten

$$\int \underline{B}\partial_{x_a}\delta \; dV = \underbrace{\underline{B}\delta\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int (\partial_{x_a}\underline{B})\,\delta \; dV \quad . \tag{II.308}$$

Somit folgt:

$$K_a^{mD} = \frac{1}{2}\underline{m}\partial_{x_a}\underline{B}(\underline{x}_0,t) + \frac{1}{2}\underline{m}\;\partial_{x_a}\underline{B}(\underline{x}_0,t) \quad .$$

Wir formen weiter um zu:

$$K_a^{mD} = \left(\underline{m}(t)\cdot\underline{B}(\underline{x}_0,t)\right)_{,a}$$

oder

$$\underline{K}^{mD} = \partial_{\underline{x}}(\underline{m}\cdot\underline{B}) \quad . \tag{II.309}$$

Interessant ist noch folgende Umformung:

$$\partial_{\underline{x}}(\underline{m}\cdot\underline{B}) = \underline{m}\times \underbrace{\partial_{\underline{x}}\times\underline{B}}_{=1/c^2\,\partial_t\underline{E}} + \left(\underline{m}\cdot\partial_{\underline{x}}\right)\underline{B} + \underline{B}\times\underbrace{\partial_{\underline{x}}\times\underline{m}}_{=0} + \underbrace{\left(\underline{B}\cdot\partial_{\underline{x}}\right)\underline{m}}_{=0} \quad ,$$

die

$$\underline{K}^{mD} = (\underline{m}\cdot\partial_{\underline{x}})\underline{B} + \frac{1}{c^2}\underline{m}\times\partial_t\underline{E} \tag{II.310}$$

liefert.

Für einen elektrischen Dipol $\underline{p}(t)$ mit

$$\underline{P}(\underline{x},t) = \underline{p}(t)\cdot\delta\left(\underline{x}-\underline{x}_0(t)\right) \tag{II.311}$$

folgt analog:

$$\underline{K}^{eD} = \partial_{\underline{x}}(\underline{p}\cdot\underline{E}) \quad . \tag{II.312}$$

Insbesondere folgt aus den abgeleiteten Beziehungen erwartungsgemäß:

$$\underline{K}^{mD} = 0 \quad , \tag{II.313}$$

$$\underline{K}^{eD} = 0 \quad , \tag{II.314}$$

wenn magnetisches und elektrisches Feld homogen sind ($\underline{E}=$ const., $\underline{B}=$ const.).

14.2 Elektromagnetische Drehmomentendichte

Die elektromagnetische Drehmomentendichte $\underline{l}$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, die in Komponentenschreibweise die Form

$$l_{ba} = (k_a x_b - k_b x_a) + \Sigma_{ab} - \Sigma_{ba} \tag{II.315}$$

annehmen. $\underline{k}$ ist dabei die elektromagnetische Kraftdichte und $\underline{\underline{\Sigma}}$ der **Maxwellsche Spannungstensor** mit den Komponenten

$$\Sigma_{ab} = E_a D_b + H_a B_b - \frac{1}{2}\delta_{ab}(\underline{E}\,\underline{D} + \underline{H}\,\underline{B}) \quad . \tag{II.316}$$

Der Vektor $\underline{l}$ der Drehmomentendichte ist hier formal auf einen antisymmetrischen Tensor l_{ab} abgebildet. Es gilt

$$l_{12} = l_3 \quad , \quad l_{23} = l_1 \quad , \quad l_{31} = l_2 \quad . \tag{II.317}$$

Der Spannungstensor-Term kann unter Ausnutzung der Materialgleichungen

$$\begin{aligned} D_a &= \varepsilon_0 E_a + P_a \\ H_a &= \kappa_0 B_a - M_a \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} - \Sigma_{ba} =& E_a D_b - E_b D_a + H_a B_b - H_b B_a \\ =& E_a \varepsilon_0 E_b + E_a P_b - E_b \varepsilon_0 E_a - E_b P_a \\ &+ \kappa_0 B_a B_b - M_a B_b - \kappa_0 B_b B_a + M_b B_a \\ =& E_a P_b - E_b P_a + B_a M_b - B_b M_a \quad . \end{aligned} \tag{II.318}$$

umgeformt werden. Betrachten wir ein Index-Paar genauer, z.B. $a = 2$, $b = 1$,

$$l_{12} = k_2 x_1 - k_1 x_2 + E_2 P_1 - E_1 P_2 + B_2 M_1 - B_1 M_2 = l_3$$

so können wir in die kompakte Schreibweise

$$\underline{l} = \underline{x} \times \underline{k} + \underline{P} \times \underline{E} + \underline{M} \times \underline{B} \tag{II.319}$$

übersetzen. Für einen magnetischen Dipol mit

$$\underline{M} = \underline{m} \cdot \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \tag{II.320}$$

ergibt sich damit ein Drehmoment

$$\begin{aligned} \underline{L}^{mD} &= \int \underline{l}^{mD} \, dV = \int \underline{m} \cdot \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{B} \, dV \\ \underline{L}^{mD} &= \underline{m} \times \underline{B} \quad , \end{aligned} \tag{II.321}$$

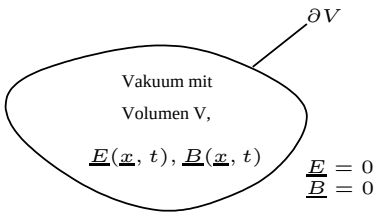
für einen elektrischen Dipol analog

$$\underline{L}^{eD} = \underline{p} \times \underline{E} \quad . \tag{II.322}$$

15 Hohlraumstrahlung

15.1 Bedeutung der Hohlraum-Strahlung

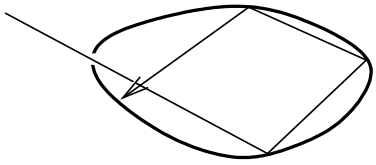
- Aufgabenstellung: Gegeben ist ein Hohlraum mit elektrisch ideal leitender und magnetfeldfreier Wand auf Temperatur T. Gesucht ist die Energie des elektromagnetischen Feldes (= elektromagnetischen Strahlungsfeldes) in diesem Hohlraum.



  - Wand auf T
  - Wand elektrisch ideal leitend, d.h. $\sigma \to \infty$; wegen $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ und $|\underline{j}| < \infty$ folgt $\underline{E} = 0$ in Wand. Insbesondere gilt dann $E_t|_{\partial V} = 0$
  - Wand magnetfeldfrei, d.h. $\underline{B} = 0$ in Wand. Insbesondere gilt dann $B_n|_{\partial V} = 0$

- Synonyme Bezeichung: Hohlraum-Strahlung = Schwarzkörper-Strahlung

- Vorstellung:
  Kleines Loch in Wand, einfallender Strahl wird in Hohlraum so gut wie vollständig absorbiert → Körper erscheint schwarz



- Bedeutung der Hohlraumstrahlung

  Hohlraum-Strahlung ist dieselbe für eine Vielzahl von Strahlungsfeldern, die in einem Volumen V konzentriert sind und für die die Endergie in V sehr viel größer ist, als die Abstrahlung der Energie vom Rand, wie z.B.

  - stark erhitztes bzw. glühendes Metall (Glühlampe!)
  - Sonne und Sterne
  - 2,7K Hintergrundstrahlung des Universums

- Experimenteller Befund

  Strahlungsenergie, insbesondere spektrale Verteilung, ist weitgehend unabhämgig vom Material, sondern hängt nur von T ab

- Klassisches Verständniss scheitert

  → Geburtsstunde der Quantentheorie (Max Planck, 1900)

- Klassische Erklärung:

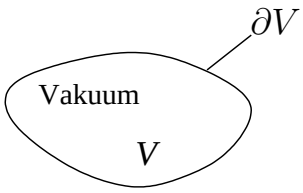
  (a) Elektrodynamischer Anteil an der Erklärung: Abzählen der Freiheitsgerade des elektromagnetischen Strahlungsfeldes, Ergebnis: ∞, aber abzählbar
  (b) Thermodynamischer Anteil an der Erklärung: Nach dem Gleichverteilungssatz entfällt je Freiheitsgrad die Energie $\frac{1}{2}k_BT$ für kinetische Energie und $\frac{1}{2}k_BT$ für potentiele Energie
  (a) & (b) $U \to \infty$; da bei spektraler Betrachtung das Divergenzproblem bei hohen Frequenzen (also im Ultraviolett-Bereich) erzeugt wird, spricht man von der Ultraviolett-Katastrophe!

- Lösung der UV-Katastrophe durch die QM:

  (a) bleibt erhalten (siehe 15.2)
  (b) Energie ist nicht mehr für jeden Freiheitsgrad gleich; frequenzabhängige Besetzungszahlen nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz; Ableitung im Rahmen der VL "Thermodynamik und Quantenstatistik"

15.2 Zerlegung des Strahlungsfeldes

15.2.1 Hohlraum beliebiger Form



Formulierung des mathematischen Problems mittels elm. Potentiale $\underline{A}, \Phi$ in Coulomb-Eichung:

$$\partial_{\underline{x}}{}^2\underline{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\underline{A} = 0 \tag{II.323}$$

$$\partial_{\underline{x}}{}^2\Phi = 0 \tag{II.324}$$

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0 \tag{II.325}$$

Ohne detaillierte Diskussion geben wir an, dass die Laplace-Gleichung zusammen mit Randbedingungen

$$\Phi \equiv 0$$

ergibt.

Es verbleibt das Problem

$$\partial_{\underline{x}}{}^2\underline{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\underline{A} = 0 \tag{II.326}$$

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0 \tag{II.327}$$

mit den Randbedingungen

$$A_t|_{\partial V} = 0 \tag{II.328}$$

$$(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A})_n|_{\partial V} = 0 \tag{II.329}$$

Die Randbedingungen folgen aus

$$\underline{E} = -\partial_t \underline{A} \tag{II.330}$$

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \tag{II.331}$$

und den Stetigkeitsbedingungen für E_t und B_n an der Hohlraumwand bei verschwindendern E_t und B_n in der Wand selber.

Separations-Ansatz:

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q(t) \hat{\underline{E}}(\underline{x}) \tag{II.332}$$

$$\Rightarrow q \partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{\underline{E}} - \frac{1}{c^2} \ddot{q} \hat{\underline{E}} = 0 \tag{II.333}$$

$$q \partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{E}^a - \frac{1}{c^2} \ddot{q} \hat{E}^a = 0 \quad , \quad a = 1,2,3$$

$$c^2 \frac{\partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{E}^a}{\hat{E}^a} = \frac{\ddot{q}}{q} = const = -\omega^2 \quad \text{(Separationskonstante)} \tag{II.334}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad \text{(Harm.Oszillator)} \tag{II.335}$$

$$\partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{E}^a + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{E}^a = 0 \quad bzw. \quad \partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{\underline{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\underline{E}} = 0 \tag{II.336}$$

Eigenwert-Problem:

$$\partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{\underline{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\underline{E}} \tag{II.337}$$

mit dem Eigenwert $-\frac{\omega^2}{c^2}$ bzw ω und der Eigenfunktion $\hat{\underline{E}}$. Da $\partial_{\underline{x}}{}^2$ Hermitescher Operator auf V, gilt

$$\hat{\underline{E}} \quad \in \quad L_2(V) \tag{II.338}$$

I.A. gibt es nicht nur einen Eigenwert und eine Eigenfunktion, so dass Nummerierung mit Index m erfolgt. Die konkrete Form der Eigenwerte ω_m und Eigenfunktionen $\hat{\underline{E}}_m$ hängt von der Geometrie von V ab.

Die Normierung wird so vorgenommen, dass

$$\int_V \hat{\underline{E}}_m \hat{\underline{E}}_n \, dV = \delta_{mn} \tag{II.339}$$

Die $\{\hat{\underline{E}}_m\}$ bilden ein vollständiges ONS, also eine ONB. Somit gilt

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q_m(x) \hat{\underline{E}}_m(\underline{x}) \tag{II.340}$$

Die Partial-Lösungen heissen Moden des Strahlungsfeldes und m ist dementsprechend der Moden-Index.

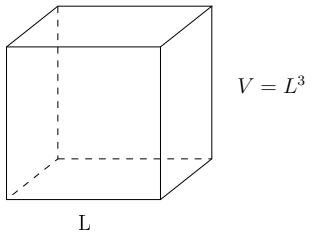
Für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ folgen

$$\underline{E}(\underline{x},t) = -\sum_m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \dot{q}_m(x) \hat{\underline{E}}_m(\underline{x}) \tag{II.341}$$

$$\underline{B}(\underline{x},t) = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q_m(x) \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m(\underline{x}) \tag{II.342}$$

Analytische Lösungen des Eigenwert-Problems sind nur für einfache Geometrien für V möglich wie Würfel, Quader, Zylinder, Kugeln u. ä.

15.2.2 Würfelförmiger Hohlraum



Lösung von:

$$\partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{E}^a = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{E}^a$$

durch weitere Separation

$$\hat{E}^a_m(\underline{x}) = \tilde{E}^a \tilde{\alpha}^a_m(x_1)\tilde{\beta}^a_m(x_2)\tilde{\gamma}^a_m(x_3) \tag{II.343}$$

$\Rightarrow$ bei bei vorübergehender Unterdrückung der Indizes

$$\alpha''\beta\gamma + \alpha\beta''\gamma + \alpha\beta\gamma'' = -\frac{\omega^2}{c^2}\alpha\beta\gamma \tag{II.344}$$

$$\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta} + \frac{\gamma''}{\gamma} = -\frac{\omega^2}{c^2} \tag{II.345}$$

(II.346)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\alpha^{a\,\prime\prime}_m}{\alpha^a_m} = -k^a_{1m}{}^2 = const \\ \frac{\beta^{a\,\prime\prime}_m}{\beta^a_m} = -k^a_{2m}{}^2 = const \\ \frac{\gamma^{a\,\prime\prime}_m}{\gamma^a_m} = -k^a_{3m}{}^2 = const \end{array}\right\} k^a_{1m}{}^2 + k^a_{2m}{}^2 + k^a_{3m}{}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Dgln für α, β, γ sind „Schwingungs-Gleichungen“ mit den allgemeinen Lösungen

$$\alpha^a_m(x_1) = \sin(k^a_{1m}x_1 + \varphi^a_{1m}) \tag{II.347}$$

$$\beta^a_m(x_2) = \sin(k^a_{2m}x_2 + \varphi^a_{2m}) \tag{II.348}$$

$$\gamma^a_m(x_3) = \sin(k^a_{3m}x_3 + \varphi^a_{3m}) \tag{II.349}$$

$$\Rightarrow \hat{E}^a_m(\underline{x}) = \tilde{E}^a \sin(k^a_{1m}x_1 + \varphi^a_{1m})\sin(k^a_{2m}x_2 + \varphi^a_{2m})\sin(k^a_{3m}x_3 + \varphi^a_{3m}) \tag{II.350}$$

Rand- und Eichbedingungen legen die k's und φ's fest:

- Betrachtung der Stetigkeit der E_t

  $\hat{E}^1_m$ ist tangential bzgl. x_2-Komponente und bzgl. x_3-Komponente

$$\Rightarrow \hat{E}^1_m(x_2 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^1_{2m} = 0 \tag{II.351}$$

$$\hat{E}^1_m(x_3 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi^1_{3m} = 0 \tag{II.352}$$

$$\hat{E}^1_m(x_2 = L) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^1_{2m}L = \pi p \Rightarrow k^1_{2m} = \frac{\pi}{L}p \tag{II.353}$$

$$\hat{E}^1_m(x_3 = L) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^1_{3m}L = \pi q \Rightarrow k^1_{3m} = \frac{\pi}{L}q \tag{II.354}$$

$$mit \quad p, q \quad \in \quad \mathbb{N} \tag{II.355}$$

$$\Rightarrow \hat{E}^1_m = \tilde{E}^1_m \sin(k^1_{1m}x_1 + \varphi^1_{1m})\sin(k^1_{2m}x_2)\sin(k^1_{3m}x_3)$$

analog für $\hat{E}^2_m, \hat{E}^3_m$

$$\hat{E}^2_m = \tilde{E}^2_m \sin(k^2_{1m}x_1)\sin(k^2_{2m}x_2+\varphi^2_{2m})\sin(k^2_{3m}x_3) \tag{II.356}$$

$$\hat{E}^3_m = \tilde{E}^3_m \sin(k^3_{1m}x_1)\sin(k^3_{2m}x_2)\sin(k^3_{3m}x_3+\varphi^3_{3m}) \tag{II.357}$$

- Betrachtung der Coulomb-Eichung

$$\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\underline{x}}\underline{\hat{E}}_m = 0 \tag{II.358}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & k^1_{1m}\tilde{E}^1_m \cos(k^1_{1m}x_1+\varphi^1_{1m})\sin(k^1_{2m}x_2)\sin(k^1_{3m}x_3) \\ & +k^2_{2m}\tilde{E}^2_m \sin(k^2_{1m}x_1)\cos(k^2_{2m}x_2+\varphi^2_{2m})\sin(k^2_{3m}x_3) \\ & +k^3_{3m}\tilde{E}^3_m \sin(k^3_{1m}x_1)\sin(k^3_{2m}x_2)\cos(k^3_{3m}x_3+\varphi^3_{3m}) \\ & = 0 \qquad \forall \quad x_1,x_2,x_3 \end{aligned} \tag{II.359}$$

$\Rightarrow$ trigonometrische Ausdrücke müssen sich in jedem Summanden ausklammern lassen, also gleich sein

$$\varphi^1_{1m} = \varphi^2_{2m} = \varphi^3_{3m} = -\frac{\pi}{2} \tag{II.360}$$

$$k^1_{1m} = k^2_{1m} = k^3_{1m} = \frac{\pi}{L}m_1 =: k_{1m} \quad m_1 \in \mathbb{N} \tag{II.361}$$

$$k^1_{2m} = k^2_{2m} = k^3_{2m} = \frac{\pi}{L}m_1 =: k_{2m} \quad m_2 \in \mathbb{N} \tag{II.362}$$

$$k^1_{3m} = k^2_{3m} = k^3_{3m} = \frac{\pi}{L}m_1 =: k_{3m} \quad m_3 \in \mathbb{N} \tag{II.363}$$

(II.364)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{E}^1_m k_{1m} + \tilde{E}^2_m k_{2m} + \tilde{E}^3_m k_{3m} &= 0 \\ \underline{\tilde{E}}_m \underline{k}_m &= 0 \end{aligned} \tag{II.365}$$

$$\underline{\tilde{E}}_m := \begin{pmatrix} \tilde{E}^1_m \\ \tilde{E}^2_m \\ \tilde{E}^3_m \end{pmatrix}, \quad \underline{k}_m := \begin{pmatrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ k_{3m} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{E}}_m \quad \perp \quad \underline{k}_m \quad \text{(transversale Polarisation)}$$

$\Rightarrow \quad \exists$ 2 linear unabhängige $\underline{\tilde{E}}_m$, also $\underline{\tilde{E}}^\sigma_m$ mit $\sigma = 1,2$ d.h. 2 linear unabhängige Polarisationsrichtungen!

- Betrachtung der Stetigkeit der B_n

alle Konstanten sind bestimmt, somit sind keine zusätzlichen Bedingungen zu erwarten, allerdings ist zu prüfen, ob Konsistenz vorliegt:

$$(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A})_n \quad \rightarrow \quad (\partial_{\underline{x}} \times \underline{\tilde{E}}_m)_n \tag{II.366}$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\underline{x}} \times \underline{\tilde{E}}_m)_{x1} \quad &= \quad \tilde{E}_{3m|2} - \tilde{E}_{2m|3} \\ &= \ldots \sin(k_{1m}x_1) - \ldots \sin(k_{1m}x_1) \end{aligned} \tag{II.367}$$

$\Rightarrow \quad (\partial_{\underline{x}} \times \underline{\tilde{E}}_m)_{x_1} = 0$ bei $x_1 = 0$ und $x_1 = L$

analog

$$\begin{aligned} (\partial_{\underline{x}} \times \underline{\tilde{E}}_m)_{x_2} = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = L \\ (\partial_{\underline{x}} \times \underline{\tilde{E}}_m)_{x_3} = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = L \end{aligned} \tag{II.368}$$

$\Rightarrow$ Randbedingung für B_n erfüllt.

- Zusammenfassung der Eigenfunktionen

$$\hat{\underline{E}}^{\sigma}_{m_1m_2m_3}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{E}^{1\sigma}_{m_1m_2m_3}\cos(m_1\frac{\pi}{L}x_1)\sin(m_2\frac{\pi}{L}x_2)\sin(m_3\frac{\pi}{L}x_3) \\ \tilde{E}^{2\sigma}_{m_1m_2m_3}\sin(m_1\frac{\pi}{L}x_1)\cos(m_2\frac{\pi}{L}x_2)\sin(m_3\frac{\pi}{L}x_3) \\ \tilde{E}^{3\sigma}_{m_1m_2m_3}\sin(m_1\frac{\pi}{L}x_1)\sin(m_2\frac{\pi}{L}x_2)\cos(m_3\frac{\pi}{L}x_3) \end{pmatrix} \tag{II.369}$$

$$\sigma = 1,2 \quad m_1,m_2,m_3 \in \mathbb{N}\text{ , wobei 2 m's nicht gleichzeitg 0 sein dürfen}$$

$$\omega_{m_1m_2m_3} = \frac{c\pi}{L}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

- Bestimmung der $\tilde{E}^{a\sigma}_{m_1m_2m_3}$ aus Normierung
- Man schreibt häufig auch weiterhin $\hat{\underline{E}}_m$, wobei man unter m einen Vierfach-Index

$$m = [\sigma, m_1, m_2, m_3] \tag{II.370}$$

versteht.

15.3 Energie der Hohlraum-Strahlung

- Energiedichte:

$$u = \frac{1}{2}(\underline{E}\underline{D} + \underline{H}\underline{B})$$
$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2) \tag{II.371}$$

- Energie:

$$U = \int_V u\, dV \tag{II.372}$$

$$U = \frac{1}{2}\int dV\{\varepsilon_0(\sum_m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\dot{q}_m\hat{\underline{E}}_m)^2 + \frac{1}{\mu_0}(\sum_m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}q_m\partial_{\underline{x}}\times\hat{\underline{E}}_m)^2\} \tag{II.373}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_m\sum_n \dot{q}_m\dot{q}_n \underbrace{\int dV\hat{\underline{E}}_m\hat{\underline{E}}_n}_{=\delta_{mn}}$$
$$+\frac{c^2}{2}\sum_m\sum_n q_mq_n \underbrace{\int dV\,\partial_{\underline{x}}\times\hat{\underline{E}}_m\,\partial_{\underline{x}}\times\hat{\underline{E}}_n}_{=\frac{\omega_m^2}{c^2}\delta_{mn}\quad(NR*)}$$
$$U = \frac{1}{2}\sum_m(\dot{q}_m^2 + \omega_m^2q_m^2) \tag{II.374}$$

- $U_m := \frac{1}{2}(\dot{q}_m^2 + \omega_m^2q_m^2)$

ist die Energie eines klassichen harmonischen Oszillators
$\Rightarrow$ Strahlungsfeld als Ensemble entkoppelter harmonischer Oszillatoren interpretierbar

- Nebenrechnung (NR *)

$$\text{z.z.} \qquad \int dV\, \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_n = \frac{\omega_m^2}{c^2} \delta_{mn} \tag{II.375}$$

$$\partial_{\underline{x}} (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \partial_{\underline{x}} \times \underline{a} - \underline{a} \partial_{\underline{x}} \times \underline{b}$$

$$\text{sei} \qquad \underline{a} = \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m$$
$$\underline{b} = \hat{\underline{E}}_n$$

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \times \hat{\underline{E}}_n) &= \hat{\underline{E}}_n \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m - (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m)(\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_n) \\ \Rightarrow \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_n &= \hat{\underline{E}}_n (\partial_{\underline{x}} \underbrace{\partial_{\underline{x}} \hat{\underline{E}}_m}_{=0} - \underbrace{\partial_{\underline{x}}{}^2 \hat{\underline{E}}_m}_{=-\frac{\omega_m^2}{c^2} \hat{\underline{E}}_m}) \\ &\quad - \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \times \hat{\underline{E}}_n) \\ &= \frac{\omega_m^2}{c^2} \hat{\underline{E}}_m \hat{\underline{E}}_n - \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \times \hat{\underline{E}}_n) \end{aligned} \tag{II.376}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int dV\, \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_n &= \frac{\omega_m^2}{c^2} \int dV \hat{\underline{E}}_m \hat{\underline{E}}_n \\ &\quad - \oint_{\partial V} (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \times \hat{\underline{E}}_n)\, d\underline{S} \end{aligned} \tag{II.377}$$

Auf ∂V gilt aber:

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m = (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m)_{\parallel} \quad \text{da} \quad (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m)_{\perp} = 0 \\ \hat{\underline{E}}_n = (\hat{\underline{E}}_n)_{\perp} \quad \text{da} \quad (\hat{\underline{E}}_n)_{\parallel} = 0 \\ \{(\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m)_{\parallel} \times (\hat{\underline{E}}_n)_{\perp}\} \perp d\underline{S} \\ \Rightarrow (\partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \times \hat{\underline{E}}_n)\, d\underline{S} = 0 \end{aligned} \tag{II.378}$$

$$\Rightarrow \int dV\, \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_m \partial_{\underline{x}} \times \hat{\underline{E}}_n = \frac{\omega_m^2}{c^2} \delta_{mn} \tag{II.379}$$

15.4 Ultraviolett-Katastrophe

- Klassische Thermodynamik : Gleichverteilungssatz

$$\begin{aligned} \text{je Freiheitsgrad kinet. Energie :} \quad & \tfrac{1}{2} k_B T \\ \text{je Freiheitsgrad pot. Energie :} \quad & \tfrac{1}{2} k_B T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T = k_B T \tag{II.380}$$

$$U = \sum_m k_B T \to \infty \tag{II.381}$$

- Verhinderung der Ultraviolett-Katastrophe
  klass. harm. Oszillatoren → quant. harm. Oszillatoren = Photonen
  d.h. Übergang von

$$\dot{q}_m = p_m \quad , \quad \dot{p}_m = -\omega_m^2 q_m$$

durch HA-Trafo zu

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\omega_m}{\sqrt{2\hbar\omega_m}}(q_m + \frac{i}{\omega_m} p_m) \\ a_m^* &= \frac{\omega_m}{\sqrt{2\hbar\omega_m}}(q_m - \frac{i}{\omega_m} p_m) \\ &\Rightarrow U = \sum_m \hbar\omega_m a_m^* a_m \end{aligned} \tag{II.382}$$

danach:

$$a_m \quad \rightarrow \quad \hat{a}_m \quad Vernichtungsoperator \tag{II.383}$$

$$a_m^* \quad \rightarrow \quad \hat{a}_m^+ \quad Erzeugungsoperator \tag{II.384}$$

(II.385)

$$U \quad \rightarrow \quad \hat{H} \quad (Hamiltonoperator) \tag{II.386}$$

$$\hat{H} = \sum_m \hbar\omega(\hat{a}_m^+ \hat{a}_m + \frac{1}{2}\hat{I}) \tag{II.387}$$

Die Abhängigkeit der Besetzungszahlen von der Temperatur wird im Rahmen der “Thermodynamik und Quantenstatistik” untersucht!

KAPITEL III

EINFÜHRUNG IN DIE SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

1 Die Relativitätsprinzipien der Newtonschen Mechanik und der Elektrodynamik

Eine zentrale Rolle spielt in diesem Abschnitt der Begriff des Inertialsystems. Darunter verstehen wir ein Bezugssystem, in dem sich jedes massive Objekt $(m \neq 0)$, auf das keine eingeprägte Kraft wirkt, gleichförmig geradlinig bewegt. Es gilt also das Newtonsche Trägheitsgesetz uneingeschränkt:

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{K} = 0 \tag{III.1}$$

$$\rightarrow \quad \underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{v}_0 t \tag{III.2}$$

Begriff: *iners* = träge (latein)

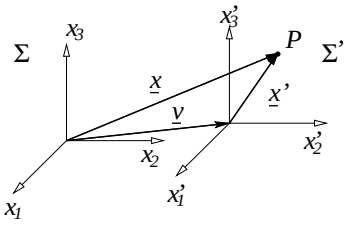
Aus der klassischen Mechanik ist das Galileische Relativitätsprinzip bekannt: Das Grundgesetz der Mechanik

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{K} \tag{III.3}$$

besitzt in allen durch Galilei-Transformationen auseinander hervorgehenden Inertialsystemem dieselbe Form, auch genannt **Forminvarianz** oder **Kovarianz**.

Die Anwendung der Galilei-Transformation

$$\underline{x}' = \underline{x} - \underline{v} \cdot t \tag{III.4}$$



wollen wir exemplarisch für ein mechanisches Teilchensystem betrachten, daß über Zweikörper-Potentiale miteinander wechselwirkt. Die Bewegungsgleichung für Teilchen A lautet dann in Σ

$$m_A \ddot{\underline{x}}_A = -\partial_{\underline{x}} \sum_B V_{AB}\left(|\underline{x}_A - \underline{x}_B|\right) \quad . \tag{III.5}$$

In Σ' gilt

$$\underline{x}'_A = \underline{x}_A - \underline{v}t \tag{III.6}$$

$$\dot{\underline{x}}'_A = \dot{\underline{x}}_A - \underline{v} \tag{III.7}$$

$$\ddot{\underline{x}}'_A = \ddot{\underline{x}}_A \tag{III.8}$$

$$|\underline{x}'_A - \underline{x}'_B| = |\underline{x}_A - \underline{x}_B| \tag{III.9}$$

$$\partial_{\underline{x}'} = \partial_{\underline{x}} \qquad (\partial_{x'_a} = \partial_{x_b} \cdot \frac{\partial x_b}{\partial x'_a} = \partial_{x_b} \delta_{ba} = \partial_{x_a}) \quad . \tag{III.10}$$

Folglich erhält man

$$m_A \ddot{\underline{x}}'_A = -\partial_{\underline{x}'} \sum_B V_{AB}\left(|\underline{x}'_A - \underline{x}'_B|\right) \quad . \tag{III.11}$$

Die **absolute Zeit** wird bewahrt: $t = t'$. Verallgemeinert auf beliebige Kräfte gilt dann

$$m_A \ddot{\underline{x}}'_A = \underline{K_A}' \quad \rightleftharpoons \quad m_A \ddot{\underline{x}}_A = \underline{K_A} \quad . \tag{III.12}$$

Eine ausführliche Erörterung der Forminvarianz des 2. Newtonschen Gesetzes wurde bereits in der Vorlesung "Theoretische Mechanik" vorgenommen. Wir verweisen dazu auf unser Mechanik-Skript, Abschnitt 2.2.

Gilt für die Elektrodynamik — d.h. für die Maxwellschen Gleichungen — dieses Relativitätsprinzip auch?

Nein, die Maxwellschen Gleichungen sind nicht kovariant beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem, der durch eine Galilei-Transformation realisiert ist. Vorgeführt wird dies nicht, da wir bisher sowieso die Maxwell-Gleichungen nur in einem ruhenden Medium kennengelernt haben.

Existiert ein anderes Relativitätsprinzip für die Elektrodynamik; gibt es eine andere Transformation, die ein Inertialsystem in ein anders Inertialsystem überführt und bei der die Maxwell-Gleichungen kovariant bleiben ?

Ja, es existiert ein Relativitätsprinzip; als Transformation ist die sog. **Lorentz-Transformation** anzuwenden. Dann sind die Maxwellschen Gleichungen in allen Inertialsystem kovariant.

Die Gültigkeit dieses Prinzips wird letztendlich nur durch Experimente bestätigt. Davon gibt es eine Vielzahl; das von Michelson (1881) ist das berühmteste. Es wurde festgestellt, daß die Lichtgeschwindigkeit im Inertialsystem eine vom Bewegungszustand der Lichtquelle unabhängige universelle Konstante ist. Da Licht nichts anderes als eine elektromagnetische Welle ist, können wir sagen: Der Michelson-Versuch zeigt, daß in allen Inertialsystemen für elektromagnetische Erscheinungen im Vakuum die Wellengleichungen

$$\partial^2_{\underline{x}} \underline{A} - \frac{1}{c^2} \partial^2_t \underline{A} = 0 \tag{III.13}$$

$$\partial^2_{\underline{x}} \Phi - \frac{1}{c^2} \partial^2_t \Phi = 0 \tag{III.14}$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0 \qquad \text{(Lorentz-Eichung)} \tag{III.15}$$

mit **gleichem** c gilt.

Weitergehend gilt auch die Kovarianz bei den inhomogenen Gleichungen:

$$\partial^2_{\underline{x}} \underline{A} - \frac{1}{c^2} \partial^2_t \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \tag{III.16}$$

$$\partial^2_{\underline{x}} \Phi - \frac{1}{c^2} \partial^2_t \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{III.17}$$

die ja bekanntlich äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen sind.

Das Postulat der Allgemeingültigkeit des Relativitätsprinzips wurde von Albert Einstein im Jahr 1905 aufgestellt.

Relativitätsprinzip

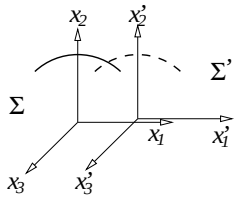
- Physikalische Gesetze haben in allen Inertialsystemen, die durch Lorentz-Transformationen auseinander hervorgehen, die gleiche Form (Kovarianz, Forminvarianz).
- Die Geschwindigkeit des Lichts ist unabhängig von seiner Quelle.

2 Eigentliche Lorentz-Transformation

Wir betrachten zwei Inertialsysteme, die sich längs der x_1 bzw. x_1'-Achse mit der Geschwindigkeit v zueinander bewegen. In den Ursprüngen sitzt je ein Beobachter.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen $x_1 = 0$ und $x_1' = 0$ zusammenfallen. Zu diesem Zeitpunkt werde im gemeinsamen Nullpunkt ein Lichtblitz ausgesandt. Jeder Beobachter behauptet nun im Mittelpunkt einer objektiven Kugelwelle zu sein, da ja beide Systeme gleichberechtigt sind:

$$\Sigma: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2 \quad ,$$
$$\Sigma': \qquad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2 t^2 \quad .$$



Das ist ein logischer Widerspruch. Zu dessen Lösung darf aber die Form der Gleichungen nicht grundsätzlich verändert werden (Kovarianz!). Lösbar ist der Widerspruch, wenn jedem Bezugssystem eine eigene Zeit zugeordnet wird, also

$$\Sigma: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0 \quad , \tag{III.18}$$
$$\Sigma': \qquad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad . \tag{III.19}$$

Die linken Terme müssen bei der Transformation kovariant sein, so daß gelten muß:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 \quad .$$

Naheliegenderweise gilt $x_2 = x_2'$ und $x_3 = x_3'$ so daß

$$x_1^2 - c^2 t^2 = x_1'^2 - c^2 t'^2 \tag{III.20}$$

verbleibt. Die Bedingung ist nun durch eine lineare Transformation $x_1' = x_1'(x_1, t)$, $t' = t'(x_1, t)$ zu erfüllen. Dementsprechend ist allgemein anzusetzen.

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{14} t \quad , \tag{III.21}$$
$$t' = a_{41} x_1 + a_{44} t \tag{III.22}$$

wobei die Koeffizienten a_{11}, a_{14}, a_{41} und a_{44} zu bestimmen sind. Eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned} x_1^2 - c^2 t^2 &= a_{11}^2 x_1^2 + 2 a_{11} a_{14} x_1 t + a_{14}^2 t^2 - c^2 \left(a_{41}^2 x_1^2 + 2 a_{41} a_{44} x_1 t + a_{44}^2 t^2 \right) \\ &= \left(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 \right) x_1^2 - c^2 \left(a_{44}^2 - \frac{1}{c^2} a_{14}^2 \right) t^2 + 2 x_1 t \left(a_{11} a_{14} - c^2 a_{41} a_{44} \right) \quad . \end{aligned}$$

Damit diese Beziehung identisch in x_1 und t erfüllt wird, müssen entsprechende Koeffizienten gleich sein:

$$1 = a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 \quad , \tag{III.23}$$
$$1 = a_{44}^2 - \frac{1}{c^2} a_{14}^2 \quad , \tag{III.24}$$
$$0 = a_{11} a_{14} - c^2 a_{41} a_{44} \quad . \tag{III.25}$$

Als vierte Gleichung betrachten wir den Ursprung von Σ' ($x_1' = 0$), der sich mit der Geschwindigkeit v in Σ bewegt, also $x_1 = vt$ und folglich

$$0 = x_1' = a_{11}x_1 + a_{14}t = (a_{11}v + a_{14})t \quad . \tag{III.26}$$

Die letzte Gleichung liefert

$$a_{14} = -va_{11} \quad . \tag{III.27}$$

Gleichung (III.25) liefert:

$$a_{41} = \frac{a_{11}a_{14}}{c^2 a_{44}} = -\frac{v}{c^2} \cdot \frac{a_{11}^2}{a_{44}} \quad . \tag{III.28}$$

Diese beiden Ausdrücke eingesetzt in die beiden Gleichungen (III.23) und (III.24) liefern

$$1 = a_{11}^2 - c^2\frac{v^2}{c^4} \cdot \frac{a_{11}^4}{a_{44}^2} = a_{11}^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{a_{11}^2}{a_{44}^2}\right) \quad , \tag{III.29}$$

$$1 = a_{44}^2 - \frac{1}{c^2}v^2 a_{11}^2 = a_{44}^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{a_{11}^2}{a_{44}^2}\right) \quad . \tag{III.30}$$

Damit

$$a_{11}^2 = a_{44}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a_{11} = a_{44} \quad .$$

Das mögliche negative Vorzeichen schließen wir aus, da sowohl $a_{11} > 0$ als auch $a_{44} > 0$ sein mögen, um bei $v = 0$ die identische Transformation zu erhalten. Dies ausnutzend liefern die Gleichungen (III.29) und (III.30)

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{III.31}$$

Schließlich

$$a_{14} = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad a_{41} = -\frac{v}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{III.32}$$

Es gilt also:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad x_2' = x_2, \qquad x_3' = x_3 \tag{III.33}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v \cdot x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{III.34}$$

Die Formeln werden nach ihrem Entdecker H.A. Lorentz benannt.

Im Matrizenkalkül nimmt die Lorentz-Transformation die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ct \end{pmatrix} \tag{III.35}$$

an. Die Umkehrtransformation ergibt sich, wie man leicht nachrechnet, einfach durch Ersetzen von v durch $-v$, was aufgrund des Relativitätsprinzips ja auch klar ist:

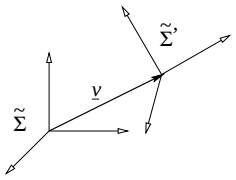
$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{III.36}$$

$$x_2 = x_2'$$

$$x_3 = x_3'$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{III.37}$$

Bemerkung: Die für die Inertialsysteme Σ und Σ' abgeleitete Transformation heißt **spezielle** Lorentz-Transformation. Liegt $\underline{v}$ nicht entlang einer Koordinatenachse und sind die zwei Inertialsysteme $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}'$ noch gegeneinander verkippt, gelangt man zur **allgemeinen** Lorentz-Transformation. $\tilde{\Sigma}$ und $\tilde{\Sigma}'$ können durch Drehungen im $\mathscr{R}^3$ in zwei Inertialsysteme Σ und Σ' überführt werden, so daß je eine Koordinate mit $\underline{v}$ zusammenfällt.



3 Folgerungen aus der Lorentz-Transformation

3.1 Relativierung der Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse A und B mit den Koordinaten in Σ

$$A: \quad x_1^A, x_2^A, x_3^A, t^A$$
$$B: \quad x_1^B, x_2^B, x_3^B, t^B$$

werden betrachtet. In Σ' entsprechen diesen Ereignissen die Koordinaten (nur Zeit)

$$t^{A'} = \frac{t^A - \frac{v}{c^2}x_1^A}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad t^{B'} = \frac{t^B - \frac{v}{c^2}x_1^B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{III.38}$$

Somit ist

$$t^{B'} - t^{A'} = \frac{t^B - t^A - \frac{v}{c^2}\left(x_1^B - x_1^A\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{III.39}$$

Gleichzeitigkeit in Σ, d.h. $t^B = t^A$ bedingt aber nicht Gleichzeitigkeit in Σ'. Für $x_1^B \neq x_1^A$ folgt

$$t^{B'} \neq t^{A'} \quad . \tag{III.40}$$

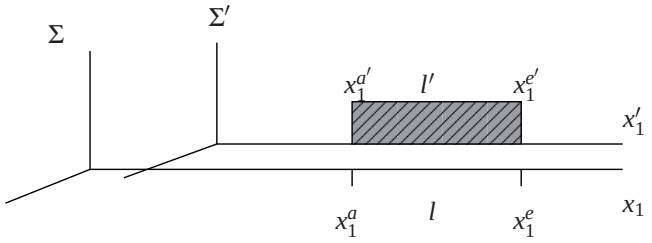
3.2 Längenkontraktion

Ein Stab der Länge l' ruhe in Σ' auf der x_1'-Achse:

$$l' = x_1^{e\prime} - x_1^{a\prime} \quad . \tag{III.41}$$

Wir vermessen diesen Stab von Σ aus. Dazu müssen wir offenbar Anfangs- und Endpunkt des Stabes gleichzeitig fixieren. Die Differenz der Koordinaten der so in Σ festgelegten Punkte liefert die Länge

$$l = x_1^e - x_1^a \quad . \tag{III.42}$$



Nun gilt

$$x_1^{e\prime} - x_1^{a\prime} = \frac{x_1^e - x_1^a - v\,(t^e - t^a)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{III.43}$$

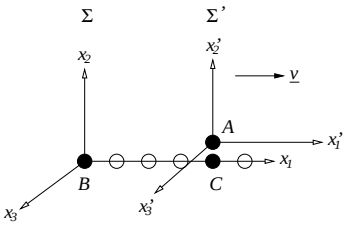
Da wir x_1^e und x_1^a zum gleichen Zeitpunkt $t^e = t^a$ feststellen, ergibt sich

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \tag{III.44}$$
$$l < l' \quad .$$

Der bewegte Stab ist kürzer als der ruhende. Die Überlegung gilt nur in Bewegungsrichtung.

3.3 Zeitdilatation

Wir betrachten eine in Σ' bei $x_1' = x_2' = x_3' = 0$ ruhende Uhr A. A gleitet an in Σ ruhenden Uhren vorüber, die alle bzgl. Σ synchronisiert sind.
Wir betrachten B und C, die in Σ ruhen, B bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und C bei $x_1 = d, x_2 = x_3 = 0$. A und B zeigen beim Vorbeigleiten aneinander Null Uhr an. Dieses Ereignis hat also die Koordinaten



$$\Sigma: \quad x_1 = x_2 = x_3 = t = 0 \quad ,$$
$$\Sigma': \quad x_1' = x_2' = x_3' = t' = 0 \quad .$$

Für das Ereignis des Vorbeigleitens von A an C gilt

$$\Sigma: \quad x_1 = d, x_2 = x_3 = 0 \quad ,$$
$$\Sigma': \quad x_1' = x_2' = x_3' = 0 \quad .$$

Eingesetzt in die Formeln für die Lorentz-Transformation folgt

$$0 = \frac{d - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ,$$
$$t' = \frac{t - \frac{vd}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad .$$

Somit

$$t = \frac{d}{v}$$

und

$$t' = \frac{t - \frac{v^2}{c^2}t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,t \tag{III.45}$$

d.h.

$$t' < t \quad . \tag{III.46}$$

Die Uhr A zeigt beim Vorbeigleiten an C die Zeit $t' < t$ an, obwohl beim Vorbeigleiten von A and B beide Uhren die gleiche Zeit Null angezeigt haben. In Σ' wird die Zeit gedehnt: **Zeitdilatation**.

Immer geht also die relativ zu einem Inertialsystem bewegte Uhr im Vergleich mit den im Inertialsystem ruhenden Uhren nach, wobei man wegen der Bewegung immer mit laufend anderen Uhren des Inertialsystems vergleichen muß.

Eigenzeit

Unter Eigenzeit τ einer Uhr verstehen wir die in ihrem Ruhesystem gemessene Zeit. Bewegt sich die Uhr in einem Inertialsystem Σ, so gilt

$$\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, t \quad . \tag{III.47}$$

Für $v(t)$ gilt

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2(\tilde{t})}{c^2}}\, d\tilde{t} \quad . \tag{III.48}$$

Weitere Überlegungen zur Eigenzeit folgen im Abschnitt 6 ('Speziell-relativistische Punktmechanik').

3.4 Additionstheoreme für Geschwindigkeiten

In Σ' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit

$$\underline{u}' = (u_1', u_2', u_3') = \left(\frac{dx_1'}{dt'}, \frac{dx_2'}{dt'}, \frac{dx_3'}{dt'} \right) \quad .$$

Durch Differenz- bzw. Differentialbildung folgt aus der Lorentz-Transformation

$$dx_1 = \frac{dx_1' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad dx_2 = dx_2' \quad , \quad dx_3 = dx_3' \quad ,$$
$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ,$$

woraus die Geschwindigkeit $\underline{u}$ dieses Punktes in Σ bestimmt werden kann. Es ergibt sich

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx_1'} = \frac{\frac{dx_1'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx_1'}{dt'}} = \frac{u_1' + v}{1 + \frac{v \cdot u_1'}{c^2}} \quad , \tag{III.49}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx_1'} = \frac{\frac{dx_2'}{dt'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx_1'}{dt'}} = \frac{u_2' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot u_1'}{c^2}} \quad , \tag{III.50}$$

$$u_3 = \frac{u_3' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v \cdot u_1'}{c^2}} \quad . \tag{III.51}$$

Diskutieren wir insbesondere den Spezialfall $u_2' = u_3' = 0$. Wenn $u_1' = c$ ist, so folgt

$$u_1 = \frac{c + v}{1 + \frac{v \cdot c}{c^2}} = c \tag{III.52}$$

Ist $u_1' < c$, so folgt auch $u_1 < c$.

Wenn man zur Lichtgeschwindigkeit eine weitere Geschwindigkeit addiert (oder subtrahiert), ergibt sich stets wieder die Lichtgeschwindigkeit. Die Addition zweier Unterlichtgeschwindigkeiten ergibt stets wieder eine Unterlichtgeschwindigkeit.

4 Der Minkowski-Raum

Die Formeln der Lorentz-Transformation zeigen uns, daß Raum und Zeit nicht wie in der vorrelativistischen Physik getrennt voneinander betrachtet werden können. So kommt z.B. der Aussage „es finden zwei Ereignisse gleichzeitig in einer bestimmten Entfernung voneinander statt“ offenbar nur in Bezug auf bestimmte Inertialsysteme einen Sinn zu. Wir müssen uns deshalb von einer solchen Ausdrucksweise trennen und zu bezugssystemunabhängigen Begriffen übergehen.

Der elementare Begriff ist der des Ereignisses. Ein Ereigniss $\mathscr{E}$ wird durch drei räumliche Koordinaten $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und eine Zeitkoordinate t beschrieben. Wir definieren nun einen Abstand S zwischen zwei Ereignissen $\mathscr{E}_A$ und $\mathscr{E}_B$ mittels der Formel

$$S^2 = (x_1^A - x_1^B)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2 + (x_3^A - x_3^B)^2 - c^2 \cdot (t^A - t^B)^2. \tag{III.53}$$

Die Größe S^2 ist offensichtlich eine Invariante — die sogenannte Fundamentalinvariante — beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes. Wir haben diese Größe ja gerade benutzt, um die Lorentz-Transformation abzuleiten.

Für infinitesimal benachbarte Ereignisse gilt entsprechend:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 \cdot dt^2 \tag{III.54}$$

Damit hat dS^2 in allen Inertialsystemen den gleichen Wert. Diesen Abstand (exakt müßte man sagen: das Abstandsquadrat) dS^2 kann man nun als Größe in einem vierdimensionalen Raum interpretieren. Wir führen neue Koordinaten $\xi^1, \ldots, \xi^4$ ein, wobei

$$\xi^1 = x_1 \quad , \quad \xi^2 = x_2 \quad , \quad \xi^3 = x_3 \tag{III.55}$$

und als vierte Dimension die Koordinate

$$\xi^4 = c \cdot t \qquad \text{(Galileische Koordinate)} \tag{III.56}$$

definiert wird. Damit folgt

$$dS^2 = \left(d\xi^1\right)^2 + \left(d\xi^2\right)^2 + \left(d\xi^3\right)^2 - \left(d\xi^4\right)^2 \quad . \tag{III.57}$$

Bei dS^2 handelt es sich um einen Spezialfall der allgemeinen Bilinearform der Differentiale $d\xi^i$ von der Form

$$dS^2 = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad . \tag{III.58}$$

Wie lesen ab, daß hier gilt

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{III.59}$$

Im Minkowsi-Raum ist statt g_{ij} auch die Bezeichnung η_{ij} gebräuchlich. Die Größe (g_{ij}) heißt **metrischer Tensor** oder **metrischer Fundamentaltensor** des durch die Koordinaten $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ aufgespannten Raumes. Dieser vierdimensionale Raum wird **Minkowski-Raum** oder **Raum-Zeit-Welt** genannt.

Die Koordinaten $\xi^1, \ldots, \xi^4$ bilden offensichtlich kein kartesisches Koordinatensystem, denn dann müßte für g_{ij} die euklidische Metrik

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{III.60}$$

gelten; ein euklidischer Raum würde vorliegen. Die Koordinaten $\xi^1,\ldots,\xi^4$ des Minkowski-Raumes bilden einen speziellen Satz von krummlinig-schiefwinkligen Koordinaten. Verkürzt spricht man einfach von krummlinigen Koordinaten, auch wenn ggf. die Koordinatenlinien gar nicht gekrümmt sondern nur schiefwinklig sind. Eingeführt und ausführlich erörtert wurden krummlinige Koordinatensysteme in der Vorlesung "Theoretische Mechanik". Wir verweisen auf unser Mechanik-Skript, Abschnitt 1.2. Dort wird zwar nur der dreidimenisonale Raum betrachtet, aber die Verallgemeinerung auf einen vierdimensionalen Raum bereitet keine Schwierigkeiten; die Überlegungen und die Mehrzahl der Formeln bleiben gültig, wenn eine vierte Koordinate hinzugenommen wird. Insbesondere werden die Summationen statt von 1 bis 3 einfach von 1 bis 4 erstreckt. Wir erinnern an die Vereinbarung, dass die Indizes $a,b,\ldots,h$ von 1 bis 3 laufen und die Indizes $i,j,\ldots$ von 1 bis 4. Außerdem wenden wir die Einsteinsche Summenkonventionen an: Über in einem Term doppelt auftretende Indizes wird automatisch summiert. Einige Überlegungen zu krummlinigen orthogonalen Koordinatensystemen befinden sich auch bereits in Abschnitt I.5 des vorliegenden Skriptes. Wir wollen hier nur die wichtigsten Eigenschaften allgemeiner krummliniger Koordinatensysteme aufschreiben und dann die Spezialisierungen für den Minkowski-Raum vornehmen.

In krummlinigen Koordinatensystemen kann man in jedem Punkt des Raumes **kovariante Basisvektoren** $\underline{b}_i$ und **kontravariante Basisvektoren** $\underline{b}^i$ einführen, die i.a. weder die gleiche Richtung noch die gleiche Länge haben.

Die kovarianten Basisvektoren $\underline{b}_i$ schmiegen sich an die jeweiligen Koordinatenlinien an. Sie sind definiert durch

$$\underline{b}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^i} \tag{III.61}$$

(vgl. Mechanik-Skript, Gl. (I.33)).

Die kontravarianten Basisvektoren $\underline{b}^i$ stehen auf den Flächen senkrecht, die entstehen, wenn die i-te Koordinate konstant gehalten wird. Sie sind definiert durch

$$\underline{b}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \underline{x}} \tag{III.62}$$

(vgl. Mechanik-Skript, Gl. (I.36)). Im vierdimensionalen Raum sind die "Flächen" dann dreidimensionale Hyperflächen.

Die ko- und kontravarianten Basisvektoren stehen aufgrund ihrer Konstruktion senkrecht aufeinander, also

$$\underline{b}_i \perp \underline{b}^k \quad , \quad i \neq k \quad . \tag{III.63}$$

Skalarproduktbildung führt auf

$$\underline{b}_i \cdot \underline{b}^k = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^i} = \delta_i^k \quad , \tag{III.64}$$

wobei δ_i^k das Kronecker-Symbol darstellt.

Die Skalarprodukte der kovarianten Basisvektoren untereinander definieren gerade den bereits erwähnten metrischen Tensor, der sich allgemein in der Form

$$g_{ik} = \underline{b}_i \cdot \underline{b}_k \tag{III.65}$$

schreibt. Kompakt als Matrix können wir auch schreiben

$$\underline{\underline{g}} = (g_{ik}) = (\underline{b}_i \cdot \underline{b}_k) \quad . \tag{III.66}$$

Das Skalarprodukt der kontravarianten Basisvektoren untereinander wird mit

$$g^{ik} = \underline{b}^i \cdot \underline{b}^k \tag{III.67}$$

bezeichnet. g^{ik} als Matrix aufgefaßt erweist sich gerade als das Inverse von (g_{ik}). Wir schreiben

$$\underline{\underline{g}}^{-1} = \left(g^{ik}\right) \quad . \tag{III.68}$$

Der Verschiebungsvektor $d\underline{\xi}$ in einem beliebigen Punkt des vierdimensionalen Raumes kann nun mit beiden Basissystemen dargestellt werden, also

$$d\underline{\xi} = \underline{b}^i \cdot d\xi_i \tag{III.69}$$

oder

$$d\underline{\xi} = \underline{b}_i \cdot d\xi^i \quad . \tag{III.70}$$

Natürlich sind die Koeffizienten $d\xi_i$ bzw. $d\xi^i$ bei Benutzung verschiedener Basisvektoren ebenfalls verschieden, obwohl es sich um die gleiche physikalische Realität — hier ausgedrückt durch $d\underline{\xi}$ — handelt. $d\xi_i$ sind die kovarianten Koordinatendifferentiale und $d\xi^i$ entsprechend die kontravarianten.

Mit Hilfe des metrischen Tensors und seines inversen Tensors lassen sich ko- und kontravariante Komponenten beliebiger Größen ineinander umrechnen. Wir betrachten dies am Beispiel der Koordinatendifferentiale. Es gilt

$$d\xi_i = g_{ik} d\xi^k \tag{III.71}$$

bzw.

$$d\xi^j = g^{jl} d\xi_l \quad . \tag{III.72}$$

Dies ist leicht einzusehen, denn skalare Multiplikation von (III.69) mit $\underline{b}_k$ und von (III.70) mit $\underline{b}^j$ führt auf

$$\underline{b}_k \cdot d\underline{\xi} = \underline{b}_k \cdot \underline{b}^i d\xi_i = \delta^i_k d\xi_i = d\xi_k \tag{III.73}$$

bzw.

$$\underline{b}^j \cdot d\underline{\xi} = \underline{b}^j \cdot \underline{b}_i d\xi^i = \delta^j_i d\xi^i = d\xi^j \quad . \tag{III.74}$$

In einem weiteren Schritt folgt bereits

$$d\xi_k = \underline{b}_k \cdot d\underline{\xi} = \underline{b}_k \cdot \underline{b}_j d\xi^j = g_{kj} d\xi^j \tag{III.75}$$

sowie

$$d\xi^j = \underline{b}^j \cdot d\underline{\xi} = \underline{b}^j \cdot \underline{b}^l d\xi_l = g^{jl} d\xi_l \quad . \tag{III.76}$$

Wir verifizieren hier auch gleich noch die obige Aussage, daß $\left(g^{ik}\right)$ das Inverse von (g_{ik}) darstellt. Nacheinanderausführung der beiden letzten Gleichungen liefert

$$d\xi_k = g_{kj} d\xi^j = g_{kj} g^{jl} d\xi_l \quad . \tag{III.77}$$

Folglich muß

$$g_{kj} g^{jl} = \delta^l_k \tag{III.78}$$

gelten.

Diese ganz allgemeinen Regeln sollen jetzt auf den Minkowski-Raum angewendet werden. Wir schreiben das Abstandsdifferential in verschiedenen Formen, d.h.

$$\begin{aligned} dS^2 &= d\underline{\xi} \cdot d\underline{\xi} && \text{(III.79)} \\ &= \underline{b}^i d\xi_i \cdot \underline{b}^j d\xi_j = g^{ij} d\xi_i d\xi_j && \text{(III.80)} \\ &= \underline{b}_i d\xi^i \cdot \underline{b}_j d\xi^j = g_{ij} d\xi^i d\xi^j && \text{(III.81)} \\ &= \underline{b}_i d\xi^i \cdot \underline{b}^j d\xi_j = \delta^i_j d\xi^i d\xi_j = d\xi^i d\xi_i \quad . && \text{(III.82)} \end{aligned}$$

Der metrische Tensor und sein Inverses sind hier recht einfach und stimmen sogar überein:

$$\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{III.83}$$

Somit gilt

$$d\xi^a = d\xi_a \quad , \quad (a = 1,2,3) \tag{III.84}$$

$$d\xi^4 = -d\xi_4 \quad . \tag{III.85}$$

Bemerkung: Prinzip des richtigen Indexbildes

Der Kalkül ist so konstruiert, daß das Indexbild einer Gleichung folgenden formalen Regeln genügen muß.

- Es ist zwischen freien Indizes und Summationsindizes zu unterscheiden.
- In einer Gleichung müssen rechts und links des Gleichheitszeichens die gleichen freien Indizes vorkommen.
- Gleiche freie Indizes müssen den gleichen Charakter (kovariant bzw. kontravariant) und damit die gleiche Höhenpositionierung (unterer bzw. oberer Index) haben.
- Bei doppelt auftretenden Summationsindizes (auch gesättigte Indizes genannt) muß ein Index kovariant und der andere kontravariant sein.
- Die Umrechnung von ko- und kontravarianten Indizes ineinander nach den Formeln

$$T^i = g^{ik} T_k \quad , \tag{III.86}$$

$$T_i = g_{ik} T^k \tag{III.87}$$

  wird auch “Indexziehen” genannt.

Wir wollen nun einige Überlegungen zur Lorentz-Transformation im Minkowski-Raum anfügen. Aus der Invarianz von S^2 bzw. dS^2 hatten wir die spezielle Lorentz-Transformation (III.35) abgeleitet. “Speziell” wird sie in diesem Fall genannt, weil die Koordinatensysteme Σ und Σ' achsenparallel zu $\underline{v}$ und außerdem nicht gegeneinander verdreht sind. Wir schreiben Gleichung (III.35) in der Form

$$\xi^{i'} = L_S{}^{i'}_{j} \xi^j \tag{III.88}$$

bzw. differentiell

$$d\xi^{i'} = L_S{}^{i'}_{j} d\xi^j \tag{III.89}$$

mit

$$\underline{\underline{L}}_S = \left(L_S{}^{i'}_{j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \quad . \tag{III.90}$$

Die inverse spezielle Lorentz-Transformation berechnet man daraus zu

$$\underline{\underline{L}}_S{}^{-1} = \left(\left(L_S{}^{-1} \right)^i_{\ j'} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \quad . \tag{III.91}$$

Erwartungsgemäß ergibt sich $\underline{\underline{L}}_{\mathrm{S}}{}^{-1}$ aus $\underline{\underline{L}}_{\mathrm{S}}$ einfach durch Vorzeichenumkehr von v ($v \to -v$); die den Übergang von Σ nach Σ' beschreibende Transformation wird wieder rückgängig gemacht.

Auf die Annahme der speziellen Lorentz-Transformation verzichten wir jetzt. $\underline{\underline{L}} = \left(L^{i'}_{j}\right)$ beschreibe eine allgemeine Lorentz-Transformation von Σ nach Σ'. $\underline{v}$ ist nicht mehr achsenparallel und Σ und Σ' können beliebig gegeneinander verdreht sein. Wir setzen an

$$d\xi^{i'} = L^{i'}_{j} d\xi^{j} \quad . \tag{III.92}$$

Vermittels der Gleichungen (III.71) und (III.72) folgt

$$d\xi_{i'} = g_{i'k'} d\xi^{k'} = g_{i'k'} L^{k'}_{m} d\xi^{m} = g_{i'k'} L^{k'}_{m} g^{mn} d\xi_{n} \quad . \tag{III.93}$$

Die Symmetrie des metrischen Tensors ausnutzend ist zu schreiben

$$d\xi_{i'} = g_{i'k'} g^{nm} L^{k'}_{m} d\xi_{n} \quad . \tag{III.94}$$

Die Invarianz von dS^2 liefert

$$dS'^2 = d\xi_{i'} d\xi^{i'} = g_{i'k'} g^{nm} L^{k'}_{m} L^{i'}_{j} d\xi_{n} d\xi^{j} \tag{III.95}$$

$$= dS^2 = d\xi_{j} d\xi^{j} \quad , \tag{III.96}$$

woraus die Forderung

$$g_{i'k'} g^{nm} L^{k'}_{m} L^{i'}_{j} = \delta^{n}_{j} \tag{III.97}$$

zu erheben ist. Dies sind 10 Bedingungsgleichungen an die $L^{k'}_{m}$; man beachte die Symmetrie des Kronecker-Symbols, weshalb nicht 16 sondern nur 10 Bedingungsgleichungen folgen. Determinantenbildung liefert

$$\det\left(g_{i'k'}\right) \det\left(g^{nm}\right) \det\left(L^{k'}_{m}\right) \det\left(L^{i'}_{j}\right) = 1 \tag{III.98}$$

bzw. kompakt geschrieben

$$\det\underline{\underline{g}}^{-1} \det\underline{\underline{g}} \left(\det\underline{\underline{L}}\right)^2 = \left(\det\underline{\underline{L}}\right)^2 = 1 \quad . \tag{III.99}$$

Die Lösung $\det\underline{\underline{L}} = +1$ kennzeichnet die **eigentliche** Lorentz-Transformation. Dieser Wert bringt $\underline{\underline{L}}$ mit einer Drehung im Minkowski-Raum in Zusammenhang. Die Lösung $\det\underline{\underline{L}} = -1$ beschreibt die uneigentliche Lorentz-Transformation; sie enthält eine vierdimensionale Spiegelung.

Explizit geben wir die allgemeine Lorentz-Transformation $\underline{\underline{L}}$ hier nicht an, da für sehr viele prinzipielle Anwendungen die spezielle Lorentz-Transformation $\underline{\underline{L}}_{\mathrm{S}}$ ausreicht. Um $\underline{\underline{L}}$ im Detail auszurechnen, würde man neben Σ und Σ' zwei Hilfskoordinatensysteme Σ_H und Σ'_H einführen. Σ_H und Σ'_H sind nicht gegeneinander verdreht und ihre ξ^1- bzw. $\xi^{1'}$-Achsen sind parallel zu $\underline{v}$. Die Lorentz-Transformation zwischen Σ_H und Σ'_H ist dann gerade $\underline{\underline{L}}_{\mathrm{S}}$. Nun sind einfach noch zusätzliche dreidimensionale Drehungen jeweils zwischen Σ und Σ_H bzw. zwischen Σ'_H und Σ' vorzunehmen und $\underline{\underline{L}}$ ist aus $\underline{\underline{L}}_{\mathrm{S}}$ generiert.

Einige nachfolgende Formeln sind noch hilfreich.

Wir gehen wieder von der Transformation von Σ nach Σ'

$$d\xi^{i'} = L^{i'}_{j} d\xi^{j}$$

aus. Nach der Kettenregel gilt auch

$$d\xi^{i'} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{k}} d\xi^{k}$$

und somit folgt

$$L^{i'}_{\ j} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{j}} \quad . \tag{III.100}$$

Die reziproke Transformation Σ' nach Σ liefert

$$d\xi^{l} = \frac{\partial \xi^{l}}{\partial \xi^{m'}} d\xi^{m'} = \left(L^{-1}\right)^{l}_{\ m'} d\xi^{m'} \quad .$$

Nacheinanderausführung ergibt

$$\frac{\partial \xi^{l}}{\partial \xi^{m'}} \cdot \frac{\partial \xi^{m'}}{\partial \xi^{r}} = \left(L^{-1}\right)^{l}_{\ m'} L^{m'}_{r} = \delta^{l}_{r} \quad \text{oder} \tag{III.101}$$

$$\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{j}} \cdot \frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{k'}} = L^{i'}_{\ j} \left(L^{-1}\right)^{j}_{\ k'} = \delta^{i'}_{k'} \quad . \tag{III.102}$$

Vergleich mit (III.97) liefert

$$\left(L^{-1}\right)^{l}_{\ m'} = g_{m'k'} g^{ln} L^{k'}_{n} \quad . \tag{III.103}$$

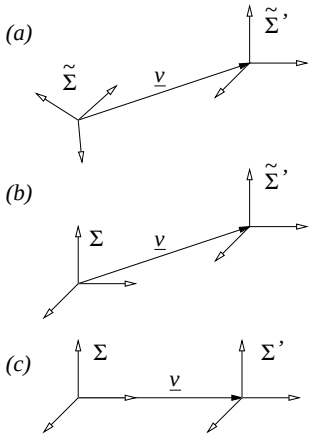
Für die inverse Transformation schreiben wir

$$L_{m'}^{\ \ l} := \left(L^{-1}\right)^{l}_{\ m'} = g_{m'k'} g^{ln} L^{k'}_{\ \ n} \tag{III.104}$$

und erhalten damit

$$\text{statt (III.102)} \quad L^{i'}_{\ \ j} L_{k'}^{\ \ j} = \delta^{i'}_{k'} \tag{III.105}$$

$$\text{oder statt (III.101)} \quad L_{m'}^{\ \ l} L^{m'}_{\ \ r} = \delta^{l}_{r} \quad . \tag{III.106}$$



Mit der Definition (III.104) haben wir uns eines speziellen Symbols für die inverse Lorentz - Transformation entledigt; „invers“ wird also damit zum Ausdruck gebracht, dass der Zeilenindex unten steht und der Spaltenindex oben. Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass es sich beim Symbol auf der linken Seite von (III.104) um eine Definition handelt und nicht um die Anwendung tensorieller Regeln für das Indexziehen, auch wenn (III.103) dies suggeriert! Aber $L^{k'}_{\ \ n}$ ist **kein** Tensor.

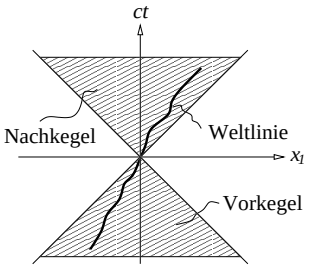
Im Weiteren müssen wir uns die Elemente von L oder dem Inversen von L nicht unbedingt in einer Matrix angeordnet vorstellen. Die mit Indizes geschriebenen Formeln gelten völlig unabhängig davon. Damit ist es auch nicht notwendig zwischen Zeilen- und Spalten-Index an L oder am Inversen von L zu unterscheiden. Der gestrichene obere Index und der ungestrichene untere Index (oder umgekehrt) können somit direkt übereinander geschrieben werden.

Wegen der 10 Bedingungsgleichungen sind von den 16 Parametern für $\underline{\underline{L}}$ nur 6 tatsächlich frei. Drei Parameter entsprechen dabei den Eulerschen Winkeln um $\tilde{\Sigma}$ und $\tilde{\Sigma}'$ achsenparallel “zurechtzudrehen” und die weiteren 3 Parameter sind die Komponenten von $\underline{v}$, das i.a. nicht parallel zu einer Koordinatenachse liegt *(a)*. $\tilde{\Sigma}$ wird gedreht bis Achsenparallelität zu $\tilde{\Sigma}'$ vorliegt *(b)*. Im speziellen Fall der achsenparallelen Ausrichtung von Σ, Σ' und $\underline{v}$ wird $\underline{\underline{L}}$ zu $\underline{\underline{L}}_{\mathrm{S}}$ *(c)*.

Der Lichtkegel

Wir denken uns den Minkwoski-Raum aufgespannt durch ein vierdimensionales Achsenkreuz Die Ereignisse entsprechen dann den Punkten im Minkowski-Raum und werden auch Weltpunkte genannt. Da die Zeit ständig in positiver Richtung gleichförmig zunimmt, beschreibt jeder Punkt eines materiellen Körpers eine Kurve — die Weltlinie des Punktes.

Betrachten wir nur Ereignisse auf der x_1-Achse. Die beiden im Winkel von 45° geneigten Geraden entsprechen offenbar Lichtsignalen („Photonen“) in positiver bzw. negativer x_1-Richtung. Die schraffierten Gebiete heißen **Lichtkegel**, und zwar Vergangenheitskegel (oder Vorkegel) für $ct < 0$ und Zukunftskegel (oder Nachkegel) für $ct > 0$.



Da sich alle Körper mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegen, verlaufen ihre Weltlinien stets im Lichtkegel. Die Punkte des Vorkegels entsprechen Ereignissen, die auf das Ereignis $(0,0)$ einen kausalen Einfluß ausüben können, während im Nachkegel alle Ereignisse enthalten sind, die vom Ereignis $(0,0)$ kausal beeinflußt werden können.

Alle Punkte innerhalb des Lichtkegels haben zum Nullpunkt den Abstand

$$S^2 = x_1^2 - c^2t^2 < 0 \quad , \quad S \text{ imaginär.} \tag{III.107}$$

Solche Abstände heißen **zeitartig**.

Raumartige Abstände mit

$$S^2 = x_1^2 - c^2t^2 > 0 \quad , \quad S \text{ reell} \tag{III.108}$$

treten zwischen dem Nullpunkt und den Punkten außerhalb des Lichtkegels auf.

Abstände mit $S^2 = 0$ heißen **lichtartig**.

5 Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Größen

Bisher haben wir nur den Zusammenhang der Koordinaten (x_1,x_2,x_3,ct) und (x_1',x_2',x_3',ct'), der durch die Lorentz-Transformation erzeugt wird, diskutiert. Wir fragen nun nach dem Zusammenhang von $(\underline{E},\underline{B},\underline{j},\rho)$ und $(\underline{E}',\underline{B}',\underline{j}',\rho')$ bzw. der Potentiale oder anderer abgeleiteter Größen. Das Relativitätsprinzip fordert die Kovarianz der Maxwell-Gleichungen unter Lorentz-Transformation, d.h. z.B.

Σ :	Σ' :
$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$	$\partial_{\underline{x}} \times' \underline{E}' = -\partial_t' \underline{B}'$
$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \partial_t \underline{D} + \underline{j}$	$\partial_{\underline{x}} \times' \underline{H}' = \partial_t' \underline{D}' + \underline{j}'$
$\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \rho$	$\partial_{\underline{x}}' \underline{D}' = \rho'$
$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0$	$\partial_{\underline{x}}' \underline{B}' = 0$

Da wir den Zusammenhang von (x_1,x_2,x_3,ct) und (x_1',x_2',x_3',ct') kennen, läßt sich unmittelbar der Zusammenhang von $\partial_{\underline{x}}\times$ und $\partial_{\underline{x}}\times'$, ∂_t und ∂_t' usw. bestimmen. Dies anwendend folgt dann schließlich auch der Zuammenhang von $\underline{E}$ und $\underline{E}'$ etc. Diese Rechnung „zu Fuß“ läßt sich wesentlich eleganter im Tensor-Kalkül ausführen.

Der Einführung von Tensoren liegt folgender Gedanke zugrunde: Physikalische Grund - Größen — ob Skalare, Vektoren oder kompliziertere Strukturen — stellen objektive Realitäten dar. Sie existieren völlig unabhängig davon, ob ein Koordinatensystem eingeführt ist und erst recht von der konkreten Form eines Koordinatensystems. Ein Koordinatensystem ist lediglich ein menschgemachtes künstliches und willkürliches Hilfsmittel, um diese objektiven Realitäten quantifizierbar zu handhaben. Betrachten wir exemplarisch das elektrische Feld $\underline{E}$ in einem bestimmten Punkt des dreidimensionalen Raumes zu einer bestimmten Zeit. $\underline{E}$ existiert natürlich ohne Festlegung eines Koordinatensystems. Symbolisieren wollen wir $\underline{E}$ durch einen Pfeil, der gerade in diesem Punkt des Raumes ansetzt. Die bestimme Zeit sei “jetzt”.

Um die Stärke von $\underline{E}$ (=Länge des Pfeils) und die Richtung von $\underline{E}$ (=Richtung des Pfeils) auch reproduzierbar angeben zu können, ist ein Koordinatensystem hilfreich. Aufgespannt wird es in dem genannten Punkt

des Raumes durch in bestimmter aber dennoch willkürlicher Weise gewählte Basisvektoren. Die Projektionen von $\underline{E}$ auf diese Basisvektoren nennen wir die (kontravarianten) Komponenten $E^1, E^2, \ldots$ von $\underline{E}$ und man schreibt

$$\underline{E} = E^1 \underline{b}_1 + E^2 \underline{b}_2 + \ldots \quad . \tag{III.109}$$

Bei einer dreidimensionalen Koordinatentransformation, d.h. der Änderung der $\underline{b}_i$, ändern sich die Komponenten E^i, ohne daß sich die physikalische Größe $\underline{E}$ ändern darf. Änderungen der $\underline{b}_i$ bedingen darauf abgestimmte Änderungen der E^i. Allerdings ist $\underline{E}$ keine Grund - Größe im Minkowski - Raum, was schon wegen der fehlenden 4. Komponente klar ist. Nun ist auch schon zu erahnen wie die weiteren Schritte aussehen. Im Minkowski-Raum wissen wir bereits, daß sich bei einem Übergang von Σ nach Σ' die Koordinaten $\xi^1, \ldots, \xi^4$ bzw. die entsprechenden Basisvektoren mittels einer Lorentz-Transformation überführen, also für die kovariante Basis

$$\underline{b}_{i'} = L_{i'}{}^k \underline{b}_k \tag{III.110}$$

und für die kontravariante Basis

$$\underline{b}^{i'} = L^{i'}_k \underline{b}^k \quad . \tag{III.111}$$

Diese Gleichungen erhalten wir aus

$$\xi^{i'} = L^{i'}{}_k \xi^k \quad , \tag{III.112}$$

$$\text{da} \quad \underline{b}^{i'} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \underline{x}} = L^{i'}{}_k \frac{\partial \xi^k}{\partial \underline{x}} = L^{i'}{}_k \underline{b}^k \tag{III.113}$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{b}_k = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^{j'}} \frac{\partial \xi^{j'}}{\partial \xi^k} = \underline{b}_{j'} L^{j'}{}_k \quad | \cdot L_{i'}{}^k \tag{III.114}$$

$$\underline{b}_{j'} L^{j'}{}_k L_{i'}{}^k = \underline{b}_{j'} \delta^{j'}_{i'} = \underline{b}_{i'} = L_{i'}{}^k \underline{b}_k \quad . \tag{III.115}$$

Nun sind Größen zu definieren, deren Komponenten sich darauf abgestimmt transformieren. Diese Größen heißen Tensoren. Ihre Einführung erfolgt in diesem Abschnitt. Schließlich müssen wir noch den Zusammenhang der uns bisher geläufigen physikalischen Größen wie $\underline{E}, \underline{B}, \underline{j}, \rho$ etc. mit den Tensoren herstellen bzw. diese Größen in geeigneter Weise mit den Tensoren identifizieren.

Exemplarisch betrachten wir einen Vektor $\underline{T}$ im Minkowski-Raum. $\underline{T}$ stelle physikalische Realität dar, z.B. Felder, und hänge damit nicht vom konkreten Bezugssystem ab. $\underline{T}$ kann dargestellt werden in verschiedenen Basen, z.B. $\{\underline{b}_i\}, \{\underline{b}^i\}, \{\underline{b}_{i'}\}, \left\{\underline{b}^{i'}\right\}, \ldots$.

$$\text{Also folgt} \quad \underline{T} = T^i \underline{b}_i = T_i \underline{b}^i = T^{i'} \underline{b}_{i'} = T_{i'} \underline{b}^{i'} = \ldots \tag{III.116}$$

$T^i, T_i, T^{i'}, T_{i'}, \ldots$ sind die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten, genannt Komponenten.

Die Umrechnung von $T^i \to T_i$ ist bekannt; sie erfolgt mit dem metrischen Tensor und hat nicht wirklich etwas mit der Lorentz - Transformation von Inertialsystem Σ ins Inertialsystem Σ' zu tun. Die Lorentz - Transformation kommt aber z.B. beim Basis - Wechsel $\{\underline{b}_i\} \to \{\underline{b}_{i'}\}$ ins Spiel.
Behauptung:

$$T^{i'} = L^{i'}{}_j T^j \tag{III.117}$$

Beweis:

$$\underline{T} = T^{i'} \underline{b}_{i'} = L^{i'}{}_j T^j L_{i'}{}^k \underline{b}_k \tag{III.118}$$

$$= \underbrace{L^{i'}{}_j L_{i'}{}^k}_{\delta^k_j} T^j \underline{b}_k = \delta^k_j T^j \underline{b}_k \tag{III.119}$$

$$= T^j \underline{b}_j \qquad q.e.d. \tag{III.120}$$

Analog gilt

$$T_{i'} = L_{i'}{}^{j}\, T_j \tag{III.121}$$

und entsprechendes für Tensoren höherer Ordnung.

5.1 Tensoren im Minkowski-Raum (Definitionen)

Im Minkowski - Raum betrachten wir ausschließlich Lorentz - Transformationen. Die darauf abgestimmten Größen heißen deshalb Lorentz - Tensoren. Später werden wir wieder kurz von Tensor sprechen, meinen hier aber immer Lorentz - Tensoren.

Lorentz - Tensor 0. Stufe

$\mathscr{T}$ ist Lorentz - Tensor 0. Stufe, wenn er bei einer Lorentz-Transformation invariant ist:

$$\mathscr{T}' = \mathscr{T} \quad . \tag{III.122}$$

Beispiele:

dS^2 Abstandsquadrat

$d\tau$ Eigenzeit, da $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt$

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{1 - v^2/c^2}dt \\ d\tau^2 &= -\frac{1}{c^2}(v^2dt^2 - c^2dt^2) \\ &= -\frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2) \\ &= -\frac{1}{c^2}\left(\left(d\xi^1\right)^2 + \left(d\xi^2\right)^2 + \left(d\xi^3\right)^2 - \left(d\xi^4\right)^2\right) \\ &= -\frac{1}{c^2}dS^2 \end{aligned}$$

Lorentz - Tensor 1. Stufe

$\underline{\mathscr{T}}$ ist Lorentz - Tensor 1. Stufe, wenn sich bei einer Lorentz-Transformation seine kovarianten Komponenten gemäß

$$\mathscr{T}_{i'} = L_{i'}{}^{j}\, \mathscr{T}_j \tag{III.123}$$

und seine kontravarianten Komponenten gemäß

$$\mathscr{T}^{i'} = L^{i'}_{j}\, \mathscr{T}^{j} \tag{III.124}$$

transformieren.

Beispiele:

$d\xi^i$	Viererdifferential
∂_{ξ^i}	Vierergradient
$\rho_0 \frac{d\xi^i}{d\tau}$	Konvektions-Viererstromdichte
$\frac{d\xi^i}{d\tau}$	Vierergeschwindigkeit
$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2}$	Viererbeschleunigung

Bemerkung zum Vierergradienten.

Der Vierergradient transformiert sich wie die kovarianten Komponenten, denn es gilt

$$\partial_{\xi^{i'}} = \frac{\partial \xi^m}{\partial \xi^{i'}} \partial_{\xi^m} = \left(L^{-1}\right)^m{}_{i'} \partial_{\xi^m} = L_{i'}{}^m \partial_{\xi^m} \quad . \tag{III.125}$$

Dies ist aber gerade die Transfomrationsformel für kovariante Komponenten.

Für die Viererdivergenz gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_{\xi^{i'}} T^{i'} &= L_{i'}{}^m \partial_{\xi^m} L_n{}^{i'} T^n \\ &= \left(L^{-1}\right)^m{}_{i'} L_n{}^{i'} \partial_{\xi^m} T^n \\ &= \delta_n^m \partial_{\xi^m} T^n \\ &= \partial_{\xi^m} T^m \quad . \end{aligned} \tag{III.126}$$

Die Viererdivergenz ist somit invariant und damit ein Lorentz - Tensor 0. Stufe.

Lorentz - Tensor 2. Stufe

$\underline{\underline{\mathscr{T}}}$ ist ein Lorentz - Tensor 2. Stufe, wenn sich seine Komponenten bei einer Lorentz-Transformation gemäß

$$\mathscr{T}_{i'j'} = L_{i'}^k L_{j'}^m \mathscr{T}_{km} \tag{III.127}$$

$$\mathscr{T}^{i'j'} = L_k^{i'} L_m^{j'} \mathscr{T}^{km} \tag{III.128}$$

transformieren. Auch gemischte Komponenten sind möglich. Dann gilt

$$\mathscr{T}_{j'}{}^{i'} = L_{j'}{}^m L^{i'}{}_k \mathscr{T}_m{}^k \quad . \tag{III.129}$$

Beispiele:

$\mathscr{A}_{ij} = \mathscr{B}_i \mathscr{C}_j$	dyadisches Produkt der zwei Tensoren 1. Stufe $\mathscr{B}_i$ und $\mathscr{C}_i$
$\mathscr{B}_{mn}$	elektromagnetischer Feldstärketensor

Verjüngung

$\mathscr{A}_i{}^i$ (Spur von $\mathscr{A}_i{}^j$) ist Tensor 0. Stufe, da

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{i'}{}^{i'} &= L_{i'}^k L^{i'}{}_j \mathscr{A}_k{}^j \\ &= \left(L^{-1}\right)^k{}_{i'} L^{i'}{}_j \mathscr{A}_k{}^j = \delta_j^k \mathscr{A}_k{}^j = \mathscr{A}_k{}^k \end{aligned}$$

Überschiebung

$\mathscr{B}_i\mathscr{C}^i$ ist die Überschiebung (das Skalarprodukt) zweier Vierervektoren.

Lorentz - Tensor n. Stufe

$\underline{\underline{\mathscr{T}}}$ heißt Lorentz - Tensor n. Stufe (n-fach unterstrichen), wenn sich seine Komponenten bei einer Lorentz-Transformation gemäß

$$\mathscr{T}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = L_{i'_1}^{k_1} L_{i'_2}^{k_2} \ldots L_{i'_n}^{k_n} \mathscr{T}_{k_1 k_2 \ldots k_n} \tag{III.130}$$

$$\mathscr{T}^{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = L_{k_1}^{i'_1} L_{k_2}^{i'_2} \ldots L_{k_n}^{i'_n} \mathscr{T}^{k_1 k_2 \ldots k_n} \tag{III.131}$$

transformieren.

Mitunter werden $\mathscr{T}^i$, $\mathscr{T}^{ij}$ als kontrvariante Tensoren und $\mathscr{T}_i, \mathscr{T}_{ij}$ als kovariante Tensoren bezeichnet. Zur Unterscheidung werden $\underline{\mathscr{T}}$ und $\underline{\underline{\mathscr{T}}}$ etc. dann geometrische Objekte genannt. Wenn wir im weiteren verkürzt z.B. von einem kontravarianten Tensor sprechen, meinen wir damit die kontravarianten Komponenten dieses Tensors.

5.2 Tensordarstellung der Maxwell-Theorie

Wir formen nun die Gleichungen der Maxwell-Theorie in Viererschreibweise und damit in Tensordarstellung um. Das Verhalten der elektromagentischen Größen bei einer Lorentz-Transformation ist in Viererdarstellung dann unmittelbar ablesbar.

Wir betrachten zunächst die Gleichungen für die Potentiale im Vakuum in Lorentz-Eichung:

$$\partial_{\underline{x}}^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi = 0$$

Wir führen jetzt Vierergrößen ein:

$$\mathscr{A}^i = \left(A_a, \frac{1}{c}\Phi\right) \qquad \text{kontravariante Komponenten des Viererpotentials} \tag{III.132}$$

$$\mathscr{J}^i = (j_a, c\rho) \qquad \text{kontravariante Komponenten der Viererstromdichte} \tag{III.133}$$

Die mit $a, b, \ldots$ indizierten Größen sind die bekannten Vektorkompenten im dreidimensionalen Raum, bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem. Da in einem kartesichen Koordinatensystem die ko- und kontravarianten Komponenten identisch sind, wird bei diesen der Index in herkömmlicher Weise nach unten gesetzt.

Den Wellenoperator formen wir um zu

$$\partial_{\underline{x}}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = g^{ij}\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^j} \equiv \Box \quad . \tag{III.134}$$

Das Symbol $\Box$ wird als Wellenoperator oder d'Alembertscher Operator bezeichnet, und bereits am Indexbild erkennt man, daß es sich um einen Tensor 0. Stufe handelt.

Die beiden Potentialgleichungen lassen sich damit schreiben als

$$\Box \mathscr{A}^k = -\mu_0 \mathscr{J}^k \quad . \tag{III.135}$$

Die Eichgleichung entspricht einer Viererdivergenz

$$\partial_{\xi j}\mathscr{A}^j = \mathscr{A}^j_{,j} = 0 \quad . \tag{III.136}$$

Hier wurde gleich noch eine verkürzte Schreibweise eingeführt. Für eine partielle Ableitung $\partial_{\xi j}$ nach einer Viererkoordinate schreibt man auch $_{,j}$ (sprich: Komma j).

Schlußfolgerungen: Das Viererpotential $\mathscr{A}^i$ und die Viererstromdichte $\mathscr{J}^i$ werden formal eingeführt. Die Viererschreibweise sagt noch nichts über den Tensorcharakter; dieser läßt sich aber aus folgenden Überlegungen deduzieren: Die Viererdivergenz $\mathscr{A}^j_{,j}$ ist ein Skalar und damit invariant bei Lorentz-Transformation. Da $\partial_{\xi j}$ ein kovarianter Tensor ist, muß $\mathscr{A}^j$ als Partner einer Überschiebung mit $\partial_{\xi j}$ ein kontravarianter Tensor sein, da die 0 auf der rechten Seite von (III.136) natürlich ein Tensor 0. Stufe ist. Da $\Box$ ein Tensor 0. Stufe und damit invariant ist, ist $\Box\mathscr{A}^k$ ein Tensor (1. Stufe), und damit muß auch $\mathscr{J}^k$ ein Tensor (1. Stufe) sein. Somit sind die oben in Viererschreibweise formulierten Gleichungen Tensorgleichungen.

Im folgenden werden die weiteren Gleichungen der Maxwell-Theorie als Tensorgleichungen — und damit invariant bei Lorentz-Transformation — formuliert. Dazu führen wir die Größen

$$\mathscr{H}^{mn} = \left(\begin{array}{c|c} H_{ab} & -cD_a \\ \hline cD_b & 0 \end{array}\right) \qquad \text{elektromagnetischer Erregungstensor,} \tag{III.137}$$

$$\mathscr{B}_{mn} = \left(\begin{array}{c|c} B_{ab} & +1/cE_a \\ \hline -1/cE_b & 0 \end{array}\right) \qquad \text{elektromagentischer Feldstärketensor} \tag{III.138}$$

ein, von denen wir später zeigen, daß es sich um Tensoren 2. Stufe handelt. $\mathscr{H}^{mn}$ und $\mathscr{B}_{mn}$ sind antisymmetrisch definiert

$$\mathscr{H}^{mn} = -\mathscr{H}^{nm} \quad , \quad \mathscr{B}_{mn} = -\mathscr{B}_{nm} \tag{III.139}$$

und es wird gesetzt

$$\mathscr{H}^{12} = H_3 \qquad \mathscr{H}^{23} = H_1 \qquad \mathscr{H}^{31} = H_2 \tag{III.140}$$

$$\mathscr{B}_{12} = B_3 \qquad \mathscr{B}_{23} = B_1 \qquad \mathscr{B}_{31} = B_2 \quad . \tag{III.141}$$

Explizit heißt dies

$$\mathscr{H}^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -cD_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -cD_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -cD_3 \\ +cD_1 & +cD_2 & +cD_3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{III.142}$$

$$\mathscr{B}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & +1/cE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & +1/cE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & +1/cE_3 \\ -1/cE_1 & -1/cE_2 & -1/cE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{III.143}$$

Behauptung: Die Maxwell-Gleichungen haben die Form

$$\mathscr{H}^{mn}{}_{,n} = \mathscr{J}^m \qquad \text{(inhomogenes System)} \tag{III.144}$$

$$\mathscr{B}_{mn,k} + \mathscr{B}_{km,n} + \mathscr{B}_{nk,m} = 0 \qquad \text{(homogenes System)} \tag{III.145}$$

Beweis

Für eine zügige Beweisführung stellen wir zunächst die Beziehungen für das konkrete Indexziehen voran. Bekanntlich gilt

$$\mathscr{T}^i = g^{ik}\mathscr{T}_k \quad . \tag{III.146}$$

Dies bedeutet konkret

$$\mathscr{T}^1 = \mathscr{T}_1 \quad , \quad \mathscr{T}^2 = \mathscr{T}_2 \quad , \quad \mathscr{T}^3 = \mathscr{T}_3 \quad , \quad \mathscr{T}^4 = -\mathscr{T}_4 \quad . \tag{III.147}$$

Bei Tensoren höherer Ordnungen gilt für jeden Index entsprechendes.

Inhomogenes System:

Für $m = 1$:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{12}{}_{,2} + \mathscr{H}^{13}{}_{,3} + \mathscr{H}^{14}{}_{,4} &= \mathscr{J}^1 \\ H_{3,2} - H_{2,3} - cD_{1,4} &= j_1 \\ H_{3,2} - H_{2,3} - cD_{1,t} \cdot \frac{1}{c} &= j_1 \\ -H_{2,3} + H_{3,2} &= D_{1,t} + j_1 \end{aligned}$$

und analog für $m = 2,3$ ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \partial_t \underline{D} + \underline{j} \quad .$$

Für $m = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{41}{}_{,1} + \mathscr{H}^{42}{}_{,2} + \mathscr{H}^{43}{}_{,3} &= \mathscr{J}^4 \\ cD_{1,1} + cD_{2,2} + cD_{3,3} &= c\rho \\ \Rightarrow \quad \partial_{\underline{x}} \underline{D} &= \rho \quad . \end{aligned}$$

Homogenes System:

Für $m,n,k = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_{12,3} + \mathscr{B}_{31,2} + \mathscr{B}_{23,1} &= 0 \\ B_{3,3} + B_{2,2} + B_{1,1} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \partial_{\underline{x}} \underline{B} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Für $m,n,k = 1,2,4$:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_{12,4} + \mathscr{B}_{41,2} + \mathscr{B}_{24,1} &= 0 \\ B_{3,4} - \frac{1}{c} E_{1,2} + \frac{1}{c} E_{2,1} &= 0 \\ \frac{1}{c} B_{3,t} - \frac{1}{c} (E_{1,2} - E_{2,1}) &= 0 \\ E_{2,1} - E_{1,2} &= -B_{3,t} \end{aligned}$$

und analog für $m,n,k = 2,3,4$ und $m,n,k = 1,3,4$ ergibt

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Kontinuitätsgleichung hat die Viererform

$$\mathscr{J}^m{}_{,m} = 0 \quad , \tag{III.148}$$

da

$$\mathscr{J}^m{}_{,m} = \mathscr{J}^a{}_{,a} + \mathscr{J}^4{}_{,4} = \partial_{\underline{x}} \underline{j} + c\rho_{,4} = \partial_{\underline{x}} \underline{j} + c \frac{1}{c} \partial_t \rho = 0 \quad .$$

Der Zusammenhang zwischen dem Feldstärketensor und dem Viererpotential ist durch die sogenannte **Viererrotation**

$$\mathscr{B}_{mn} = \mathscr{A}_{n,m} - \mathscr{A}_{m,n} \tag{III.149}$$

gegeben. Man verifiziert

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_{12} &= A_{2,1} - A_{1,2} = B_3 \\ \mathscr{B}_{23} &= A_{3,2} - A_{2,3} = B_1 \\ \mathscr{B}_{13} &= A_{3,1} - A_{1,3} = -B_2 \\ \Rightarrow \quad \underline{B} &= \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \end{aligned} \tag{III.150}$$

und

$$\mathscr{B}_{14} = \mathscr{A}_{4,1} - \mathscr{A}_{1,4} = -\mathscr{A}^4{}_{,1} - \mathscr{A}^1{}_{,4} = -\frac{1}{c}\Phi_{,1} - A_{1,t}\frac{1}{c} = \frac{1}{c}E_1$$

und analog für B_{24}, B_{34} ergibt

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\Phi - \partial_t \underline{A} \quad .$$

Die Wellengleichung für das Viererpotential A_k betrachten wir im Fall des Vakuums, wo die Materialgleichungen

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} \quad , \quad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}$$

gelten. Wegen $\varepsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c}$ folgt dann

$$\mathscr{H}^{mn} = \frac{1}{\mu_0}\mathscr{B}^{mn} \quad . \tag{III.151}$$

Das inhomogene System nimmt jetzt die Form

$$\mathscr{B}^{mn}{}_{,n} = \mu_0 \mathscr{J}^m \tag{III.152}$$

an. Daraus ergibt sich

$$g^{mi}g^{nj}\mathscr{B}_{ij,n} = g^{mi}g^{nj}\left(\mathscr{A}_{j,i,n} - \mathscr{A}_{i,j,n}\right) = \mu_0 \mathscr{J}^m \quad . \tag{III.153}$$

Für den ersten Term folgt

$$g^{mi}g^{nj}\mathscr{A}_{j,i,n} = g^{mi}\mathscr{A}^n{}_{,i,n} = g^{mi}\mathscr{A}^n{}_{,n,i} \quad . \tag{III.154}$$

Dieser Ausdruck verschwindet wegen der Eichgleichung $\mathscr{A}^n{}_{,n} = 0$. Es verbleibt

$$\begin{aligned} g^{mi}g^{nj}\mathscr{A}_{i,j,n} &= -\mu_0 \mathscr{J}^m \\ g^{nj}\mathscr{A}^m{}_{,j,n} &= -\mu_0 \mathscr{J}^m \quad . \end{aligned} \tag{III.155}$$

Dies ist gerade die Wellengleichung (III.135).

Zu zeigen ist noch, daß $\mathscr{H}^{mn}$ und $\mathscr{B}_{mn}$ tatsächlich Tensoren 2. Stufe sind. Die Tensoreigenschaft von $\mathscr{H}^{mn}$ folgt aber unmittelbar aus (III.144), da $\mathscr{J}^m$ ein Tensor ist und somit $\mathscr{H}^{mn}$ zunächst bezüglich des ersten Index ein Tensor sein muß. Der zweite Index von $\mathscr{H}^{mn}$ wird aber mit dem Vierergradienten überschoben, so daß die Tensoreigenschaft auch bezüglich dieses Indexes klar ist. Die Tensoreigenschaft von $\mathscr{B}_{mn}$ ist unmittelbar klar aus (III.149), da die rechte Seite aus Tensoren konstruiert ist.

5.3 Durchführung der Lorentz-Transformation elektromagnetischer Größen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir explizit das Verhalten der räumlich-zeitlichen Koordinaten bei einer Lorentz-Transformation untersucht. Nun untersuchen wir das Verhalten, wie sich $\underline{E}$, $\underline{B}$ etc. bei Anwendung einer Lorentz-Transformation verändern. Die Anwendung des Tensorkalküls macht die Berechnung besonders einfach. Wir beschränken uns hier wieder auf die spezielle Lorentz-Transformation $\underline{\underline{L}}_S$, bei der Σ und Σ' achsenparallel ausgerichtet sind und $\underline{v}$ in x_1- bzw. x'_1-Richtung liegt. Es gelten dann folgende Transformationsformeln:

Viererpotential $\mathscr{A}^k = (A_a, 1/c\,\Phi)$:

$$\mathscr{A}^{i'} = L^{i'}_{\ j}\mathscr{A}^j$$

$$\mathscr{A}^{1'} = \frac{\mathscr{A}^1 - \frac{v}{c}\mathscr{A}^4}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{1'} = \frac{A_1 - \frac{v}{c^2}\Phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \tag{III.156}$$

$$\mathscr{A}^{2'} = \mathscr{A}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{2'} = A_2} \tag{III.157}$$

$$\mathscr{A}^{3'} = \mathscr{A}^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{3'} = A_3} \tag{III.158}$$

$$\mathscr{A}^{4'} = \frac{-\frac{v}{c}\mathscr{A}^1 + \mathscr{A}^4}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\Phi' = \frac{-\frac{v}{c}A_1 + \frac{1}{c}\Phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi' = \frac{\Phi - vA_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \tag{III.159}$$

Feldstärketensor:

$$\mathscr{B}_{m'n'} = L^k_{\ m'}L^{\ l}_{n'}\mathscr{B}_{kl}$$

$$\mathscr{B}_{1'2'} = L^k_{\ 1'}L^{\ l}_{2'}\mathscr{B}_{kl} = L^1_{\ 1'}L^{\ l}_{2'}\mathscr{B}_{1l} + L^4_{\ 1'}L^{\ l}_{2'}\mathscr{B}_{4l}$$

$$\mathscr{B}_{1'2'} = L^1_{\ 1'}\mathscr{B}_{12} + L^4_{\ 1'}\mathscr{B}_{42}$$

$$B_{3'} = \frac{B_3 - \frac{v}{c}\frac{1}{c}E_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{3'} = \frac{B_3 - \frac{v}{c^2}E_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \tag{III.160}$$

$$\mathscr{B}_{2'3'} = L^k_{\ 2'}L^{\ l}_{3'}\mathscr{B}_{kl} = L^2_{\ 2'}L^3_{\ 3'}\mathscr{B}_{23} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{1'} = B_1} \tag{III.161}$$

$$\mathscr{B}_{3'1'} = L^k_{\ 3'}L^{\ l}_{1'}\mathscr{B}_{kl} = L^3_{\ 3'}L^1_{\ 1'}\mathscr{B}_{31} + L^3_{\ 3'}L^4_{\ 1'}\mathscr{B}_{34},$$

$$B_{2'} = \frac{B_2 - \frac{v}{c}\left(-\frac{1}{c}E_3\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{2'} = \frac{B_2 + \frac{v}{c^2}E_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \tag{III.162}$$

$$\mathscr{B}_{1'4'} = L^k_{\ 1'}L^{\ l}_{4'}\mathscr{B}_{kl} = L^1_{\ 1'}L^{\ l}_{4'}\mathscr{B}_{1l} + L^4_{\ 1'}L^{\ l}_{4'}\mathscr{B}_{4l}$$

$$\mathscr{B}_{1'4'} = L^1_{\ 1'}L^4_{\ 4'}B_{14} + L^4_{\ 1'}L^1_{\ 4'}\mathscr{B}_{41}$$

$$\frac{1}{c}E_{1'} = \frac{1\cdot\left(\frac{1}{c}E_1\right) - \frac{v}{c}\left(-\frac{v}{c}\right)\left(-\frac{1}{c}E_1\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}^2}$$

$$= \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{c}E_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{1'} = E_1} \tag{III.163}$$

(III.164)

$$\mathscr{B}_{2'4'} = L_{2'}^{k} L_{4'}^{l} \mathscr{B}_{kl} = L_{2'}^{2} L_{4'}^{1} \mathscr{B}_{21} + L_{2'}^{2} L_{4'}^{4} \mathscr{B}_{24}$$

$$\frac{1}{c} E_{2'} = \frac{-\frac{v}{c}(-B_3) + \frac{1}{c} E_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{2'} = \frac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} \tag{III.165}$$

$$\mathscr{B}_{3'4'} = L_{3'}^{3} L_{4'}^{1} \mathscr{B}_{31} + L_{3'}^{3} L_{4'}^{4} \mathscr{B}_{34}$$

$$\frac{1}{c} E_{3'} = \frac{-\frac{v}{c} B_2 + \frac{1}{c} E_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{3'} = \frac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} \tag{III.166}$$

Die Transformationen von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ können wir in kompakte Formeln zusammenfassen, falls $v/c \ll 1$. Dann nähern wir $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$ und es folgt mit $\underline{v} = (v,0,0)$

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} \quad , \tag{III.167}$$

$$\underline{B}' = \underline{B} - \frac{1}{c^2} \underline{v} \times \underline{E} \approx \underline{B} \quad . \tag{III.168}$$

Mit diesen Formeln läßt sich leicht die Kraft auf eine Punktladung q ausrechnen. Wenn q im System Σ' ruht, gilt

$$\underline{K}' = q\underline{E}' \quad . \tag{III.169}$$

In Σ ist q bewegt und die Ladung erfährt die bekannte Lorentz-Kraft

$$\underline{K} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad . \tag{III.170}$$

5.4 Das elektromagentische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Diese Aufgabe ließe sich ohne jede Kenntnis der Lorentz-Transformation lösen. Im Abschnitt „Retardierte und avancierte Potentiale“ sind die Quellen

$$\rho(\underline{x},t) = q\delta(\underline{x} - \underline{v}t) \tag{III.171}$$

$$\underline{j}(\underline{x},t) = q \cdot \underline{v}\delta(\underline{x} - \underline{v}t) \tag{III.172}$$

in den Integralen für $\underline{A}$ und Φ zu spezifizieren und dann die Integrationen vorzunehmen. Wesentlich schneller kommen wir voran, wenn wir q in Σ' als ruhend annehmen und dann nach Σ transformieren. In Σ' gilt:

$$A_{a'} = 0 \quad , \quad \Phi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} \quad , \quad r' = \sqrt{{x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2} \quad .$$

Damit folgt in Σ

$$A_1 = \frac{\frac{v}{c^2}\Phi'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{1}{r'} \tag{III.173}$$

$$A_2 = A_3 = 0 \tag{III.174}$$

$$\Phi = \frac{\Phi'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{1}{r'} \quad . \tag{III.175}$$

r' ist noch in r umzurechnen:

$${x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2 = \frac{(x_1 - vt)^2}{1-v^2/c^2} + x_2^2 + x_3^2 = \frac{(x_1 - vt)^2 + (x_2^2 + x_3^2)(1-v^2/c^2)}{1-v^2/c^2} \quad .$$

Dann erhalten wir

$$A_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)}} \quad , \tag{III.176}$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)}} \quad . \tag{III.177}$$

Folglich sind die Flächen gleichen Potentials in Σ keine Kugelflächen mehr sondern Ellipsoide.
Zur Berechnung von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ können wir entweder die gerade berechneten Potentiale A_1 und Φ differenzieren oder wir benutzen (III.160) bis (III.166). Wir gehen den zweiten Weg und invertieren zunächst, um zu erhalten

$$E_1 = E_{1'} \tag{III.178}$$

$$E_2 = \frac{E_{2'}+vB_{3'}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{III.179}$$

$$E_3 = \frac{E_{3'}-vB_{2'}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{III.180}$$

(III.181)

$$B_1 = B_{1'} \tag{III.182}$$

$$B_2 = \frac{B_{2'}-\frac{v}{c^2}E_{3'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{III.183}$$

$$B_3 = \frac{B_{3'}+\frac{v}{c^2}E_{2'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad . \tag{III.184}$$

Im Ruhesystem Σ' des Teilchens gilt

$$\underline{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}\frac{\underline{x}'}{r'} \tag{III.185}$$

$$\underline{B}' = 0 \quad . \tag{III.186}$$

Wir berechnen in Σ nur das elektrische Feld $\underline{E}$ und erhalten

$$E_1 = \quad E_{1'} \quad = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{x_1-vt}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}{\left\{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.187}$$

$$E_2 = \frac{E_{2'}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}x_2}{\left\{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.188}$$

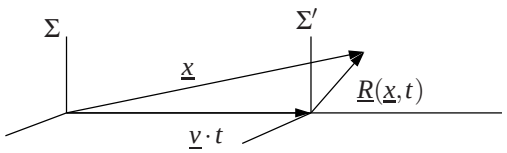
$$E_3 = \frac{E_{3'}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}x_3}{\left\{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.189}$$

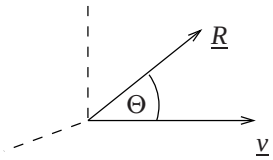
(III.190)

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)(x_1-vt)}{\left\{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.191}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)x_2}{\left\{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.192}$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)x_3}{\left\{(x_1-vt)^2+(x_2^2+x_3^2)(1-v^2/c^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.193}$$





Umschrift der Formeln mit

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{R}(\underline{x},t) = \underline{x} - \underline{v}t \quad , \quad R = |\underline{R}| \tag{III.194}$$

liefert

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)(\underline{x} - \underline{v}t)}{\left\{(\underline{x} - \underline{v}t)^2 + \frac{v^2}{c^2}(x_2^2 + x_3^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.195}$$

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)\underline{R}(\underline{x},t)}{\left\{R^2(\underline{x},t) + \frac{v^2}{c^2}(x_2^2 + x_3^2)\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad . \tag{III.196}$$

Mit

$$\underline{R}_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R_\perp = |\underline{R}_\perp| \tag{III.197}$$

folgt

$$v^2(x_2^2 + x_3^2) = v^2 R_\perp^2 \tag{III.198}$$
$$= |\underline{v} \times \underline{R}_\perp|^2 \tag{III.199}$$
$$= |\underline{v} \times \underline{R}|^2 \tag{III.200}$$
$$= (vR\sin\Theta)^2 \tag{III.201}$$

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)\underline{R}(\underline{x},t)}{\left\{R^2(\underline{x},t) - \frac{v^2}{c^2}R^2\sin^2\Theta(\underline{x},t)\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{III.202}$$

(III.203)

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\frac{\underline{R}(\underline{x},t)}{\underline{R}^3(\underline{x},t)}}_{\text{Coulomb}} \underbrace{\frac{1 - v^2/c^2}{\left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta\right\}^{\frac{3}{2}}}}_{\text{Abweichung vom Coulomb - Feld}} \tag{III.204}$$

Interessant ist insbesondere die Abweichung vom Coulomb - Feld. Die Feldlinien sind transversal verdichtet (siehe Abbildung).

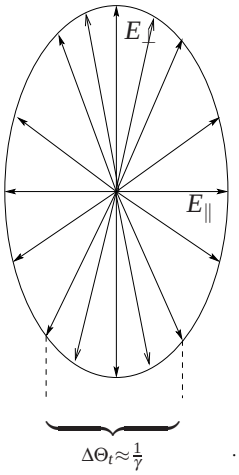


Abbildung III.1: Das elektrische Feld einer schnell bewegten Ladung. Die Feldlinien des konstanten elektrischen Feldes enden auf der kontrahierten Ellipse und sind in der transversalen Richtung stark verdichtet. (nach Ludwig,...)

6 Speziell-relativistische Punktmechanik

Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass die Bewegung eines Körpers durch das Newton'sche Gesetz beschrieben wird. Dieses Gesetz ist forminvariant, wenn eine Galilei-Transformation vollzogen wird. D.h. in verschiedenen Inertialsystemen hat das Newton'sche Gesetz die gleiche Form. Die hier in Rede stehenden Inertialsysteme gehen aber durch eine Galilei-Transformation auseinander hervor und nicht durch eine Lorentz-Transformation. Die Galilei-Transformation ist aber der Grenzfall der Lorentz-Transformation für kleine Geschwindigkeiten verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit. Da wir den Maxwell-Gleichungen das Primat als der „höher entwickelten" Theorie geben, ist das Newton'sche Gesetz so zu verallgemeinern, dass es forminvariant bei Lorentz-Transformation wird. Es ist also eine Verallgemeinerung gesucht, die auf Lorentz-Tensoren beruht. Vorbereitend betrachten wir die infinitesimale Bewegung eines Körpers mit der Masse m_0 (genauer werden wir später m_0 als Ruhemasse bezeichnen) und beurteilen diese Bewegung in zwei Inertialsystemen Σ und Σ'. Ein Beobachter in Σ registriert eine Verschiebung um $d\underline{x}$ in der Zeit dt und ein Beobachter in Σ' registriert für die gleiche infinitesimale Bewegung des Körpers eine Verschiebung um $d\underline{x}'$ in einer Zeit $d\underline{t}'$ (siehe Abbildung). $d\underline{x}$ und $d\underline{x}'$ sind natürlich nicht gleich, ebenso wenig wie $d\underline{t}$ und $d\underline{t}'$. Sie gehen jeweils durch Lorentz-Transformation auseinander hervor. Invariant ist allerdings dS.
Wir erhalten

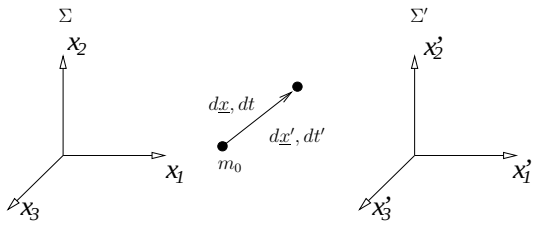


Abb.: Infinitesimale Bewegung einer Masse m_0 beurteilt von einem Beobachter in $\Sigma(d\underline{x}, dt)$ und von einem Beobachter in $\Sigma'(d\underline{x}', dt')$

$$dS^2 = dS'^2 \tag{III.205}$$

$$d\underline{x}^2 - c^2 dt^2 = d\underline{x}'^2 - c^2 dt'^2 \tag{III.206}$$

$$\left(\frac{d\underline{x}^2}{dt^2} - c^2\right) dt^2 = \left(\frac{d\underline{x}'^2}{dt'^2} - c^2\right) dt'^2 \tag{III.207}$$

Für die Geschwindigkeit des Körpers wie sie der jeweilige Beobachter in Σ und Σ' wahrnimmt, schreiben wir

$$\underline{u} := \frac{d\underline{x}}{dt} \quad ; \quad \underline{u}' := \frac{d\underline{x}'}{dt'} \tag{III.208}$$

$$u := |\underline{u}| \quad ; \quad u' := |\underline{u}'| \tag{III.209}$$

Nach Division durch $(-c^2)$ folgt

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) dt'^2 \tag{III.210}$$

Die linke bzw. rechte Seite sind dann offensichtlich invariant. Die entsprechende Grösse wurde bereits früher als Eigenzeit τ eingeführt. So gilt

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) dt'^2 = -\frac{dS^2}{c^2} \tag{III.211}$$

Somit ist $d\tau$ ein Tensor 0. Stufe, da dS ein Tensor 0. Stufe ist. Zur Interpretation von τ als Eigenzeit betrachten wir ein drittes System Σ_0, das fest mit dem Körper verbunden ist. I. a. ist Σ_0 kein Inertialsystem, da sich der Körper beliebig bewegen darf. In einer infinitesimalen Betrachtung sind $\underline{u}$ und $\underline{u}'$ aber konstant, und damit ist neben Σ und Σ' auch Σ_0 momentan inertial. In Σ_0 ist die Geschwindigkeit des Körpers natürlich $\underline{u}_0 = 0$. Zeitliche Änderungen $d\tau$ werden von einem Beobachter in Σ_0 mit der eigenen ruhenden Uhr registriert, was die Bezeichung Eigenzeit nahe legt. Die Rolle von dt im Newton'schen Gesetz sollte also bei einer Verallgemeinerung durch $d\tau$ übernommen werden. Diese Vorstellung kommt der Newton'schen absoluten Zeit, für die ja $t = t'$ galt, am nächsten. Wir stellen noch folgende Beziehung bereit

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, dt, \tag{III.212}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\tau}{dt} \quad \frac{d}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, \frac{d}{d\tau} \tag{III.213}$$

6.1 Vierdimensionale Bewegungsgleichung

Wir begeben uns jetzt in das ungestrichene Inertialsystem Σ und konstruieren die Bewegungsgleichung in diesem System. Die Bewegungsgleichung ist so aufzustellen, daß sie bei Lorentz-Transformationen forminvariant bleibt und für $u \ll c$ das bekannte Newtonsche Gesetz

$$d_t\left(m d_t x_a\right) = K_a \tag{III.214}$$

liefert.

Es liegt nahe, einen tensoriellen Ansatz für ein forminvariantes Gesetz zu machen. Vorsorglich erlauben wir Abänderungen in der Masse und in den Kraftkomponenten, weshalb neue Symbole im Ansatz verwendet werden:

$$d_\tau\left(m_0 d_\tau \xi^i\right) = \mathscr{K}^i \quad . \tag{III.215}$$

$\mathcal{K}^i$ nennen wir Vierer - Kraft.

Für die ersten drei Komponenten $i = a$ ergibt sich aus diesem Ansatz:

$$d_t\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}d_t\xi^a\right) = \mathcal{K}^a\cdot\sqrt{1-u^2/c^2} \quad ,$$

Um das Newtonsche Grundgesetz (III.214) zu reproduzieren, müssen wir

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \text{(Dynamische Masse)} \quad , \tag{III.216}$$

$$K_a = \mathcal{K}^a\cdot\sqrt{1-u^2/c^2} \tag{III.217}$$

setzen. Es ist hervorzuheben, daß die ursprüngliche Ruhemasse m_0 durch die speziell relativistische Verallgemeinerung in die sogenannte dynamische Masse m übergeht. Für $u \ll c$ ergibt sich für die dynamische Masse m wieder die Ruhemasse m_0.

Für die 4. Komponente $i = 4$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} d_\tau\left(m_0 d_\tau\xi^4\right) &= \mathcal{K}^4 \quad , \quad \xi^4 = ct \\ d_\tau\left(m_0 c d_\tau t\right) &= \mathcal{K}^4 \quad , \\ d_t\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) &= \mathcal{K}^4\cdot\sqrt{1-u^2/c^2} \quad , \\ d_t(mc^2) &= c\,\mathcal{K}^4\sqrt{1-u^2/c^2} \quad . \end{aligned} \tag{III.218}$$

Die rechte Seite wird wie folgt umgeformt. Wir nutzen zunächst aus, daß die Viererkraft $\mathcal{K}^i$ und die (kovariante) Vierergeschwindigkeit $d_\tau\xi_i$ senkrecht aufeinander stehen, denn es gilt bekanntlich

$$-c^2 = \left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2 = \frac{d\xi_i}{d\tau}\cdot\frac{d\xi^i}{d\tau} \quad . \tag{III.219}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi_i}{d\tau}\cdot\frac{d\xi^i}{d\tau}\right) &= \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}\cdot\frac{d\xi^i}{d\tau} + \frac{d\xi_i}{d\tau}\cdot\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} \\ &= g_{ij}g^{ik}\frac{d^2\xi^j}{d\tau^2}\cdot\frac{d\xi_k}{d\tau} + \frac{d\xi_i}{d\tau}\cdot\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} \\ &= 2\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2}\cdot\frac{d\xi_i}{d\tau} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{III.220}$$

Somit gilt wegen (III.215) auch

$$\mathcal{K}^i\cdot d_\tau\xi_i = 0 \quad . \tag{III.221}$$

Wir formen um zu

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{K}^i\cdot d_\tau\xi_i &= \mathcal{K}^a d_\tau\xi_a + \mathcal{K}^4 d_\tau\xi_4 \\ &= \frac{K_a}{\sqrt{1-u^2/c^2}}d_t x_a\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - c\mathcal{K}^4\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad , \end{aligned}$$

woraus

$$c\mathcal{K}^4\sqrt{1-u^2/c^2} = K_a\cdot d_t x_a \tag{III.222}$$

und wegen (III.218)

$$d_t(mc^2) = K_a\cdot d_t x_a = d_t A \tag{III.223}$$

folgt. A steht für die mechanische Arbeit. Die 4. Komponente der Vierer-Bewegungsgleichung liefert somit die Energiebilanz. mc^2 ist als kinetische Energie des Teilchens zu interpretieren, die durch Arbeitsaufwand verändert wird:

$$E^{\text{kin}} = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}c^2 \quad . \tag{III.224}$$

Die Newtonsche kinetische Energie folgt durch Reihenentwicklung für $u^2/c^2 \ll 1$:

$$E^{\text{kin}} = m_0c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\ldots\right)$$

$$E^{\text{kin}} = \underbrace{m_0c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_0u^2}_{\text{Newtonsche kin. Energie}} + \ldots \tag{III.225}$$

Aus dieser Entwicklung ergibt sich Einstein's legendäre Gleichung

$$E_{ruh} = m_0 \cdot c^2 \tag{III.226}$$

Eine interessante Darstellung folgt nach folgender Umformung:

$$\left(E^{kin}\right)^2 = m^2c^4 = \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}} - m_0^2c^4 + m_0^2c^4 \tag{III.227}$$

$$= \frac{m_0^2c^4 - \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)m_0^2c^4}{1-\frac{u^2}{c^2}} + m_0^2c^4 \tag{III.228}$$

$$= \frac{m_0^2u^2c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} + m_0^2c^4 = m^2u^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{III.229}$$

$$E^{kin} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{III.230}$$

$$\text{mit} \quad p = mu \quad . \tag{III.231}$$

Diese Formel ist Ausgangspunkt für die Dirac - Gleichung und weitere Beziehungen der relativistischen Quantenmechanik.

In Analogie zum klassischen Impuls wird noch der Viererimpuls über

$$d_\tau \mathscr{P}^i = \mathscr{K}^i \tag{III.232}$$

eingeführt. Mit $d_t p_a = K_a$ und (III.218) ergibt sich

$$\mathscr{P}^i = \left(p_a, \frac{E^{\text{kin}}}{c}\right) \quad . \tag{III.233}$$

6.2 Elektromagnetische Viererkraft

Die elektromagnetische Viererkraft auf ein Teilchen der Ladung e wird eingeführt durch

$$\mathscr{K}_i = e\mathscr{B}_{ik}d_\tau\xi^k \quad . \tag{III.234}$$

Zunächst stellen wir die Konsistenz mit der Orthogonalität

$$\mathscr{K}_i \cdot d_\tau\xi^i = eB_{ik}d_\tau\xi^i \cdot d_\tau\xi^k = 0$$

fest. Bekanntlich verschwindet die Spur des Produkts eines antisymmetrischen (B_{ik}) und eines symmetrischen ($d_\tau\xi^i d_\tau\xi^k$) Tensors.

Die Rückinterpretation obiger Beziehung ergibt für $i = a$:

$$\begin{aligned}
K_a &= \mathscr{K}_a\sqrt{1-u^2/c^2} = e\mathscr{B}_{ai}d_\tau\xi^i\cdot\sqrt{1-u^2/c^2} = e\mathscr{B}_{ai}\cdot d_t\xi^i \\
K_a &= e\mathscr{B}_{ab}d_t\xi^b + e\mathscr{B}_{a4}d_t\xi^4 = e\mathscr{B}_{ab}d_t x_b + ce\mathscr{B}_{a4} \\
K_a &= e\mathscr{B}_{ab}\cdot u_b + ce\left(\frac{1}{c}\right)E_a \\
\underline{K} &= e\underline{u}\times\underline{B} + e\underline{E} \qquad \text{(Lorentzkraft).}
\end{aligned} \tag{III.235}$$

Für die vierte Komponente $i = 4$ erhält man

$$\mathscr{K}_4 = e\mathscr{B}_{4b}d_\tau\xi^b = -e\frac{1}{c}E_b d_t x_b\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -\mathscr{K}^4 \quad .$$

Wegen (III.222) gilt

$$\mathscr{K}^4 = K_a d_t x_a\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

und folglich vergleicht man zu

$$e\underline{E}\cdot\underline{u} = \underline{K}\cdot\underline{u} = d_t A \quad , \tag{III.236}$$

was die Energiebilanz bestätigt.

Die Einführung der elektromagnetischen Viererkraft vermittels der tensoriellen Gleichung (III.234) ist damit verifiziert.

KAPITEL IV

SPEZIALFÄLLE

1 Statisches elektrisches Feld

1.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen

Es verschwinden alle zeitlichen Ableitungen sowie die magnetischen Größen:

$$\partial_t \underline{D} = 0 \quad , \quad \underline{B} = 0 \quad , \quad \underline{H} = 0 \quad , \quad \underline{j} = 0 \quad . \tag{IV.1}$$

Somit verbleiben die Gleichungen

$$\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \rho \quad , \tag{IV.2}$$
$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = 0 \quad . \tag{IV.3}$$

Gl.(IV.3) wird durch das skalare Potential vermittels

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \tag{IV.4}$$

erfüllt. Wir betrachten im weiteren ein lineares und isotropes Medium mit

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E} \quad . \tag{IV.5}$$

Das Gaußsche Gesetz ergibt dann

$$\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \varepsilon_0 \partial_{\underline{x}} (\varepsilon \underline{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon \partial_{\underline{x}} \underline{E} + \varepsilon_0 \underline{E} \partial_{\underline{x}} \varepsilon = \rho \quad .$$

Unter Benutzung der Polarisation $\underline{P}$ kann formuliert werden

$$\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \partial_{\underline{x}} (\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) = \varepsilon_0 \partial_{\underline{x}} \underline{E} + \partial_{\underline{x}} \underline{P} = \rho \quad . \tag{IV.6}$$

Folgich gilt

$$\varepsilon_0 \partial_{\underline{x}} \underline{E} = \rho - \partial_{\underline{x}} \underline{P} = \frac{\rho}{\varepsilon} - \varepsilon_0 \underline{E} \, \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon \quad . \tag{IV.7}$$

Diese beiden Darstellungen legen nun die Einführung verschiedener Ladungsbegriffe nahe:

ρ	wahre Ladungsdichte
$\rho^p = -\partial_{\underline{x}} \underline{P}$	Polarisationsladungsdichte
$\rho^f = \rho + \rho^p$	fiktive Ladungsdichte
$\frac{\rho}{\varepsilon}$	freie Ladungsdichte
$\rho^i = -\varepsilon_0 \underline{E} \, \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon$	induzierte Ladungsdichte

Für das Potential Φ folgt

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} - \partial_{\underline{x}} \Phi \, \partial_{\underline{x}} \ln \varepsilon = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \frac{\rho^i}{\varepsilon_0} \tag{IV.8}$$

bzw.

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\rho^p}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho+\rho^p}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho^f}{\varepsilon_0} \quad . \tag{IV.9}$$

In homogenen Medien vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho \quad . \tag{IV.10}$$

Die inhomogene Lösung lautet

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,dV' \quad . \tag{IV.11}$$

Diese Formel kann angewendet werden, wenn $\rho(\underline{x}')$ tatsächlich bekannt ist; das ist aber keinesfalls immer der Fall, z.B. in Leitern.

1.2 Feldberechnungen einfacher Ladungsverteilungen

1.2.1 Punktladung im homogenen und isotropen Medium

Für eine Ladung e am Ort $\underline{x}_e$ gilt die Ladungsdichte

$$\rho(\underline{x}') = e\delta(\underline{x}-\underline{x}_e) \quad . \tag{IV.12}$$

Das Potential folgt zu

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{x}) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int \frac{\delta(\underline{x}'-\underline{x}_e)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV' \quad , \\ \Phi(\underline{x}) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_e|}\end{aligned} \tag{IV.13}$$

und ergibt gerade das Coulombpotential. Das elektrische Feld bestimmt sich zu

$$\underline{E} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\partial_{\underline{x}}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_e|} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_e|^2}\cdot\frac{\underline{x}-\underline{x}_e}{|\underline{x}-\underline{x}_e|} \tag{IV.14}$$

und ist radial nach außen gerichtet (für $e>0$) bei mit dem Abstand quadratischem Abfall. Die elektrostatische Kraftwirkung auf eine Ladung f am Ort $\underline{x}_f$ ist dann

$$\underline{K} = f\cdot\underline{E} = \frac{e\cdot f}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{1}{|\underline{x}_f-\underline{x}_e|^2}\frac{\underline{x}_f-\underline{x}_e}{|\underline{x}_f-\underline{x}_e|} \quad . \tag{IV.15}$$

1.2.2 Dipol im homogenen und isotropen Medium

Wir konstruieren einen elektrischen Dipol aus den Ladungen e und $-e$, die sich im Abstand $\underline{l}$ zueinander befinden. Das Dipolmoment einer Ladungsverteilung ist allgemein definiert durch

$$\underline{p} = \int \underline{x}'\rho(\underline{x}')dV' \quad . \tag{IV.16}$$

Hier gilt

$$\begin{aligned}\rho(\underline{x}') &= e\delta(\underline{x}'-\underline{x}_e) - e\delta(\underline{x}'-\underline{x}_{-e}) \\ &= e\delta(\underline{x}'-\underline{x}_e) - e\delta\big(\underline{x}'-(\underline{x}_e-\underline{l})\big) \quad .\end{aligned}$$

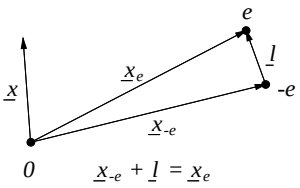
Das Dipolmoment folgt dann zu

$$\underline{p} = \int \underline{x}' \left\{ e\delta(\underline{x}' - \underline{x}_e) - e\delta\left(\underline{x}' - (\underline{x}_e - \underline{l})\right) \right\} dV'$$
$$\underline{p} = e\underline{x}_e - e(\underline{x}_e - \underline{l}) = e\underline{l} \quad . \tag{IV.17}$$

Das Potential berechnet sich zunächst zu

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left\{ \frac{e}{|\underline{x} - \underline{x}_e|} - \frac{e}{|\underline{x} - \underline{x}_{-e}|} \right\} \quad . \tag{IV.18}$$

Diesen Ausdruck vereinfachen wir für das Fernfeld des Dipols; dort kann $\underline{l}$ als klein angenommen werden und der Dipol als Punkt betrachtet werden. Es folgt



$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e}{|\underline{x} - \underline{x}_e|} \left\{ 1 - \frac{1}{\frac{|\underline{x} - \underline{x}_{-e}|}{|\underline{x} - \underline{x}_e|}} \right\} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{\frac{|\underline{x} - \underline{x}_e + \underline{l}|}{|\underline{x} - \underline{x}_e|}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{(\underline{x} - \underline{x}_e + \underline{l})^2}{(\underline{x} - \underline{x}_e)^2}}} \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{(\underline{x} - \underline{x}_e)^2 + 2\underline{l}(\underline{x} - \underline{x}_e) + \underline{l}^2}{(\underline{x} - \underline{x}_e)^2}}} \qquad (\underline{l}^2 \text{ wird vernachlässigt}) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\underline{l}(\underline{x} - \underline{x}_e)}{(\underline{x} - \underline{x}_e)^2}}} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\underline{l}(\underline{x} - \underline{x}_e)}{(\underline{x} - \underline{x}_e)^2} \right) \\
&= \frac{\underline{l}(\underline{x} - \underline{x}_e)}{(\underline{x} - \underline{x}_e)^2} \quad .
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\underline{p} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_e)}{|\underline{x} - \underline{x}_e|^3} \quad . \tag{IV.19}$$

Der Vergleich mit dem Monopol zeigt folgende Tendenz:

$$\begin{aligned}
\text{Monopol} \qquad & \Phi \propto \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_e|} \\
\text{Dipol} \qquad & \Phi \propto \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_e|^2} \\
\text{Quadrupol} \qquad & \Phi \propto \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_e|^3} \qquad \text{etc.}
\end{aligned} \tag{IV.20}$$

Die Momente einer Ladungsverteilung ergeben sich als Potenzreihenentwicklung des Integranden.

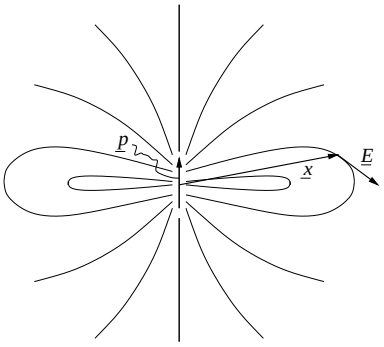
Aus dem Potential (IV.19) berechnen wir das elektrische Feld eines Dipols zu

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\Phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \partial_{\underline{x}} \frac{\underline{p} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_e)}{|\underline{x} - \underline{x}_e|^3} \quad . \tag{IV.21}$$

O.B.d.A. legen wir den Dipol in den Ursprung $\underline{x}_e = 0$, $|\underline{x}| = r$ und erhalten mit

$$\partial_{\underline{x}}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\underline{A}\partial_{\underline{x}})\underline{B} + (\underline{B}\partial_{\underline{x}})\underline{A} + \underline{A} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} + \underline{B} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \tag{IV.22}$$

$$\underline{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{(\underline{p}\partial_{\underline{x}})\frac{\underline{x}}{r^3} + \underbrace{\left(\frac{vx}{r^3}\partial_{\underline{x}}\right)\underline{p}}_{=0} + \underline{p}\times\underbrace{\partial_{\underline{x}}\times\frac{\underline{x}}{r^3}}_{=0} + \frac{vx}{r^3}\times\underbrace{\partial_{\underline{x}}\times\underline{p}}_{=0}\right\} \quad ,$$



$$(\underline{p}\partial_{\underline{x}})\frac{\underline{x}}{r^3} = p_a\partial_{x_a}\frac{x_b}{r^3} = p_a\frac{\delta_{ab}}{r^3} + p_a x_b\left(-3\frac{1}{r^4}\frac{x_a}{r}\right)$$
$$= \frac{\underline{p}}{r^3} - \frac{3(\underline{p}\cdot\underline{x})\underline{x}}{r^5}$$

und schließlich

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\left(\frac{3(\underline{p}\cdot\underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{p}\right) \quad . \tag{IV.23}$$

1.2.3 Homogen geladene Kugel

Siehe Übungsaufgabe

1.2.4 Homogen geladene Kugeloberfläche

Siehe Übungsaufgabe.

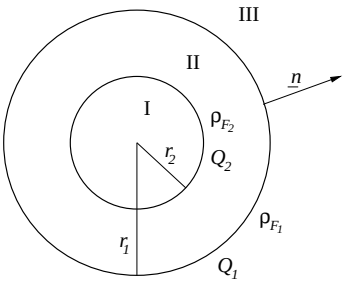
1.2.5 Kugelkondensator

Die Ladungsdichte lautet

$$\rho = \rho_{F_1}\cdot 2\delta(r-r_1) + \rho_{F_2}\cdot 2\delta(r-r_2) \quad , \tag{IV.24}$$

wobei $\pm\rho_F$ die Flächenladungsdichten auf den Kugelschalen sind. Für die Gesamtladung gilt natürlich

$$\int \rho\, dV = 4\pi\rho_{F_1}\int_0^\infty 2\delta(r-r_1)r^2dr + 4\pi\rho_{F_2}\int_0^\infty 2\delta(r-r_2)r^2dr$$
$$= 4\pi(\rho_{F_1}r_1^2 + \rho_{F_2}r_2^2) = Q_1 + Q_2 \quad . \tag{IV.25}$$



I,III: Vakuum
II: Medium mit ε

Man beachte, daß

$$\int_0^\infty \delta(r-r_i)r^2dr = \frac{1}{2}r_i^2 \tag{IV.26}$$

gilt.

In den verschiedenen Gebieten liefert die Potentialgleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi = d_r^2\Phi + \frac{2}{r}d_r\Phi = \frac{1}{r^2}d_r(r^2d_r\Phi) = 0 \tag{IV.27}$$

folgende Lösungen

$$\text{II:} \quad r^2d_r\Phi = \overline{Q} = \text{const.} \quad , \quad d_r\Phi = -E_n = \frac{\overline{Q}}{r^2} \quad , \quad \Phi = -\frac{\overline{Q}}{r} + \Phi_0^{\text{II}}$$
$$\text{I bzw. III:} \quad \Phi = \Phi_0^{\text{I}} \text{ bzw. } \Phi = \Phi_0^{\text{III}} \quad \text{(da hier kein Feld vorhanden sein soll).} \tag{IV.28}$$

Die Grenzbedingungen ergeben an der Stelle $r = r_1$

$$\Phi_0^{\mathrm{III}} = -\frac{\overline{Q}}{r_1} + \Phi_0^{\mathrm{II}} \tag{IV.29}$$

$$D_n^{\mathrm{III}} - D_n^{\mathrm{II}} = \rho_{F_1} = 0 - \varepsilon_0 \varepsilon E_n(r_1) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\overline{Q}}{r_1^2} \tag{IV.30}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Q} = \frac{\rho_{F_1} r_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

und für $r = r_2$

$$\Phi_0^{\mathrm{I}} = -\frac{\overline{Q}}{r_2} + \Phi_0^{\mathrm{II}} \tag{IV.31}$$

$$D_n^{\mathrm{II}} - D_n^{\mathrm{I}} = \rho_{F_2} = \varepsilon_0 \varepsilon E_n(r_2) - 0 = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\overline{Q}}{r_2^2} \tag{IV.32}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Q} = -\frac{\rho_{F_2} r_2^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad .$$

Folglich gilt

$$\rho_{F_1} r_1^2 = -\rho_{F_2} r_2^2 \tag{IV.33}$$

und somit

$$Q_1 = -Q_2 \equiv Q \quad . \tag{IV.34}$$

Die Gesamtladung $Q_1 + Q_2$ verschwindet demnach. Das elektrische Feld zwischen den Kugelschalen kann dann in der Form

$$E_n = -\frac{\rho_{F_1} r_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{1}{r^2} \tag{IV.35}$$

dargestellt werden.

Die Potentialdifferenz zwischen den Kugelschalen ergibt sich zu

$$\Phi(r_1) - \Phi(r_2) = -\frac{\overline{Q}}{r_1} + \frac{\overline{Q}}{r_2} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \frac{\rho_{F_1} r_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \quad . \tag{IV.36}$$

Die Kapazität des Kugelkondensators ist festgelegt durch

$$C = \frac{Q}{\Phi(r_1) - \Phi(r_2)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad . \tag{IV.37}$$

1.2.6 Vakuole in homogen geladener Kugel

Siehe Übungsaufgabe

1.2.7 Homogen geladener Draht

Siehe Übungsaufgabe

1.2.8 Plattenkondensator

Siehe Übungsaufgabe.

Weitere kompliziertere Beispiele für Kondensatorberechnungen befinden sich z.B. in *A. Sommerfeld, Vorlesugen über Theoretische Physik, Bd. 3, Elektrodynamik*.

1.3 Feldberechnungen beim Vorhandensein von Leitern

Für Feldberechnungen in berandeten Medien ist die in 1.2 angegebene inhomogene Lösung der Poissonschen Gleichung nicht mehr ausreichend. Die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung ist hinzuzuziehen, und vermittels geeigneter Wahl der Integrationskonstanten sind die Randwerte zu erfüllen.

Es existieren verschiedene Lösungsmethoden, die der Symmetrie der Probleme angepaßt sind. Im weiteren werden typische Beispiele vorgestellt.

1.3.1 Feld in einem Leiter

Leiter enthalten frei bewegliche Ladungsträger. Alleine deshalb lassen sich bereits qualitative Aussagen über das elektrische Feld $\underline{E}$ und das Potential Φ im Inneren des Leiters und auf seiner Oberfläche machen.

- Im Leiterinneren ist $\underline{E} = 0$ und $\Phi = \text{const.}$

  Man denke sich ein Feld $\underline{E} \neq 0$ im Leiter. Dann wirkt auf jede Ladung q im Leiter die Kraft

  $$\underline{K} = q\underline{E} \quad ,$$

  die die Ladung solange bewegt, bis ein statischer Zustand erreicht ist. Dann ist die resultierende Kraft auf jede Ladung verschwunden und es gilt $\underline{E} = 0$.

- Auf der Leiteroberfläche steht das elektrische Feld senkrecht.

  Ein paralleles Feld $E_{\parallel}$ führt zur Kraft

  $$K_{\parallel} = qE_{\parallel} \quad ,$$

  die die Ladung q solange parallel zur Oberfläche verschiebt, bis $E_{\parallel} = 0$ gilt und statische Verhältnisse vorliegen. Folglich ist dann die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche, d.h. $\Phi = \text{const.}$ Demzufolge gilt an der Oberfläche

  $$0 = d\Phi = \partial_{\underline{x}}\Phi \cdot d\underline{x}$$

  und somit

  $$\partial_{\underline{x}}\Phi \perp d\underline{x} \quad . \tag{IV.38}$$

- Alle Überschußladungen eines Leiters sind auf seiner Oberfläche als Flächenladungsdichte ρ_S lokalisiert.

  Jegliche Ladungsverteilung im Innern $\rho(\underline{x}, t=0)$ wird im Laufe der Zeit abgebaut. Die Kontinuitätsgleichung und das Ohmsche Gesetz in homogenen und isotropen Leitern liefern

  $$\partial_t \rho = -\partial_{\underline{x}}\underline{j} = -\sigma\partial_{\underline{x}}\underline{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho$$

  woraus

  $$\rho(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t=0)\exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}t\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{IV.39}$$

  folgt. Die Übergangsbedingung für die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung führt dann auf

  $$D_n = \rho_S \quad , \tag{IV.40}$$

  wobei D_n außerhalb des Leiters ist (im Leiter ist $D_n = 0$).

1.3.2 Spiegelladungsmethode

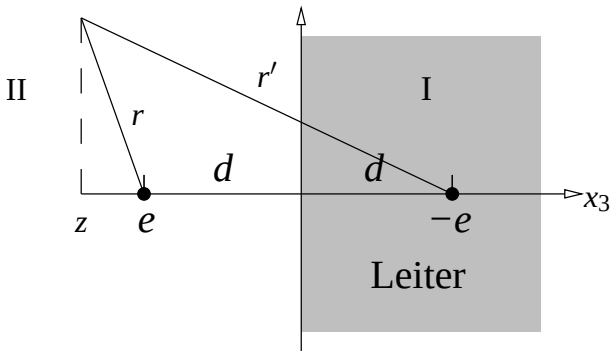
a) Punktladung vor einem leitenden Halbraum

Wir wollen nun das elektrische Feld einer Punktladung e vor einem leitenden geerdeten Halbraum $\Phi = 0$ berechnen.

Die Ladung e zieht auf der Leiteroberfläche $x_3 = 0$ sogenannte **Influenzladungen** $\rho_S(x_1, x_2)$ zusammen, deren Verteilung zunächst nicht bekannt ist. Es ist deshalb nicht möglich, das Randwertproblem für das Potential Φ zu lösen, da

$$\rho_S = D_n^{\mathrm{I}}\big|_{x_3=0} - D_n^{\mathrm{II}}\big|_{x_3=0} = -\,D_n^{\mathrm{II}}\big|_{x_3=0} = -\varepsilon_0 E_3 = \varepsilon_0 \partial_{x_3}\Phi\big|_{x_3=0} \tag{IV.41}$$

nicht vorgegeben ist. Aus diesem Grunde soll hier die Methode der Spiegelladungen angewandt werden, die in geometrisch einfach Fällen sehr schnell zum Ziel führt.



Das eigentliche Randwertproblem wird durch ein Äquivalentes Problem ohne Randbedingungen ersetzt. Die Ladungsverteilung im Leiteraußenraum wird beibehalten und die Randbedingungen werden durch eine geeignet gewählte Anordnung von fiktiven Ladungen simuliert. Da die fiktiven Ladungen — auch Spiegel- oder Bildladungen genannt — die Quellen in dem betrachteten Volumen nicht beeinflussen, stimmen für beide Probleme die Potentiale im Leiteraußenraum überein. Wir wählen die Spiegelladung $-e$ bei $x_3 = d$. Dann gilt

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e}{r} - \frac{e}{r'}\right) \tag{IV.42}$$

Auf der Leiteroberfläche $(r = r')$ ist damit die Randbedingung $\Phi = 0$ erfüllt. Wegen der Rotationssymmetrie des Problems führen wir Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ein. Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2} \quad , \quad r' = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2} \\ \Phi &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}\right) \\ \partial_z\Phi &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\frac{2(z+d)}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}^3} + \frac{1}{2}\frac{2(z-d)}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}^3}\right) \end{aligned} \tag{IV.43}$$

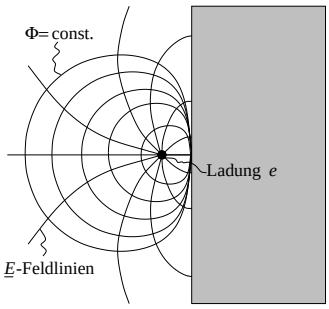
Die Flächenladungsdichte ρ_S ergibt sich damit zu

$$\rho_S(\rho) = -\varepsilon_0 E_z = \varepsilon_0 \partial_x \Phi\big|_{z=0} = \frac{e}{4\pi}\left(\frac{-2d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3}\right) \quad . \tag{IV.44}$$

Die Gesamtladung auf der Grenzfläche ist dann

$$\int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho_S = -ed \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3}$$
$$= -ed \left(\rho^2 + d^2\right)^{-1/2} \Big|_0^\infty = -e \quad . \tag{IV.45}$$

Alle von e ausgehenden Feldlinien enden damit auf der Leiterobefläche.



b) Punktladung vor einer leitenden geerdeten Kugel

Siehe Übungsaufgabe

c) Punktladung vor einer leitenden nicht geerdeten Kugel

Siehe Übungsaufgabe

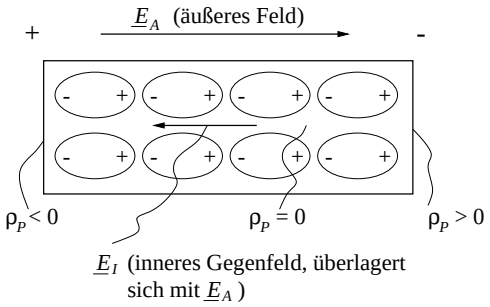
d) Punktladung zwischen mehreren Metallplatten

Siehe Übungsaufgabe

1.4 Feldberechnung beim Vorhandensein dielektrischer Grenzflächen

1.4.1 Felder in dielektrischen Medien

Das elektrische Feld wird nicht nur durch die Anwesenheit von Leitern, sondern auch durch Nichtleiter (Dielektrika) geändert. In Nichtleitern sind die Ladungen nicht frei beweglich. Im Gegensatz zu den Leitern kann deshalb das Feld im Innern von Nichtleitern durchaus von Null verschieden sein. Ein Nichtleiter enthält positive und negative Ladungen in gleicher Anzahl, die sich im feldfreien Fall gerade kompensieren. Wird jedoch ein Feld aufgebaut, dann verschieben sich die positiven und negativen Ladungen in geringen Grenzen gegeneinander und es kommt zur Ausbildung von atomaren Elementardipolen. Auf diese Weise entsteht in einem Nichtleiter die Polarisation $\underline{P}$. Die dabei entstehenden Ladungen werden Polarisationsladungen ρ_P genannt. Bei gleicher Polarisation aller Atome werden sich die Polarisationsladungen im Innern des Dielektrikums gerade kompensieren, an der Oberfläche verbleiben jedoch Oberflächenladungen. Die können als felderzeugende Ladungen eines Gegenfeldes aufgefaßt werden, welches das ursprüngliche Feld schwächt.

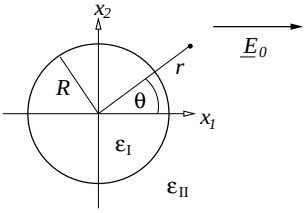


1.4.2 Dielektrische Kugel im homogenen Feld

Exemplarisch betrachten wir nun eine dielektrische Kugel im homogenen Feld.

Zu lösen ist die Feldgleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = 0 \quad , \quad \underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \tag{IV.46}$$



mit den Randbedingungen

$$\lim_{r\to\infty} \underline{E} = \underline{E}_0 \tag{IV.47}$$

$$\lim_{r\to\infty} \Phi = -E_0 \cdot x_1 = -E_0 r\cos\theta \tag{IV.48}$$

$$D_n^{\mathrm{I}}\big|_R = D_n^{\mathrm{II}}\big|_R \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{\mathrm{I}} \partial_r \Phi^{\mathrm{I}}\big|_R = \varepsilon_{\mathrm{II}} \partial_r \Phi^{\mathrm{II}}\big|_R \tag{IV.49}$$

$$\Phi^{\mathrm{I}}(R) = \Phi^{\mathrm{II}}(R) \quad . \tag{IV.50}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$r < R: \qquad \Phi^{\mathrm{I}} = -\lambda^{\mathrm{I}} \cdot x_1 \tag{IV.51}$$

$$r > R: \qquad \Phi^{\mathrm{II}} = -E_0 x_1 + \frac{\lambda^{\mathrm{II}} \cdot x_1}{r^3} \tag{IV.52}$$

ist (IV.48) erfüllt. Einsetzen in (IV.46):

$$\begin{aligned}
&\partial_{\underline{x}}^2 \Phi^{\mathrm{I}} = 0 \\
&\partial_{\underline{x}}^2 \Phi^{\mathrm{II}} = \lambda^{\mathrm{II}} \cdot \partial_{\underline{x}}^2 \frac{x_1}{r^3} \\
&\qquad = -\lambda^{\mathrm{II}} \partial_{\underline{x}}^2 \partial_{x_1} \frac{1}{r} \qquad \text{, da} \quad \partial_{x_1} \frac{1}{r} = -\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{r} 2x_1}{r^2} = -\frac{x_1}{r^3} \\
&\qquad = -\lambda^{\mathrm{II}} \partial_{x_1} \partial_{\underline{x}}^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad \text{, da} \quad \partial_{\underline{x}}^2 \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 0 \text{ für } r \neq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist (IV.46) erfüllt.

(IV.50) liefert:

$$-\lambda^{\mathrm{I}} \cdot R\cos\theta = -E_0 R\cos\theta + \lambda^{\mathrm{II}} \frac{\cos\theta}{R^2}$$

$$\lambda^{\mathrm{I}} = E_0 - \lambda^{\mathrm{II}} \frac{1}{R^3} \quad . \tag{IV.53}$$

(IV.49) ergibt:

$$\varepsilon_{\mathrm{I}}\left(-\lambda^{\mathrm{I}}\cos\theta\right)=\varepsilon_{\mathrm{II}}\left(-E_0\cos\theta-2\frac{\lambda^{\mathrm{II}}\cos\theta}{R^3}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}}\lambda^{\mathrm{I}}=E_0+2\frac{\lambda^{\mathrm{II}}}{R^3}\quad . \tag{IV.54}$$

Das Gleichungssystem für λ^{I} und λ^{II}

$$\begin{pmatrix}1 & 1/R^3\\ \varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}} & -2/R^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{\mathrm{I}}\\ \lambda^{\mathrm{II}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_0\\ E_0\end{pmatrix} \tag{IV.55}$$

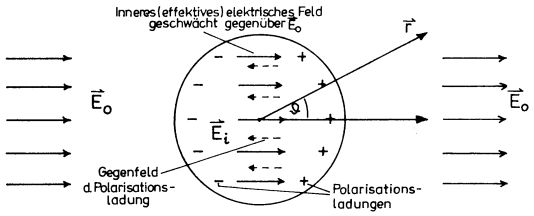
hat die Lösung

$$\lambda^{\mathrm{I}}=\frac{\begin{vmatrix}E_0 & 1/R^3\\ E_0 & -2/R^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1/R^3\\ \varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}} & -2/R^3\end{vmatrix}}=\frac{-3E_0/R^3}{1/R^3(-2-\varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}})}$$

$$\lambda^{\mathrm{I}}=\frac{3E_0}{2+\varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}}}=\frac{3\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}E_0 \tag{IV.56}$$

$$\lambda^{\mathrm{II}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & E_0\\ \varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}} & E_0\end{vmatrix}}{1/R^3(-2-\varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}})}=\frac{1-\varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}}}{-2-\varepsilon_{\mathrm{I}}/\varepsilon_{\mathrm{II}}}E_0R^3$$

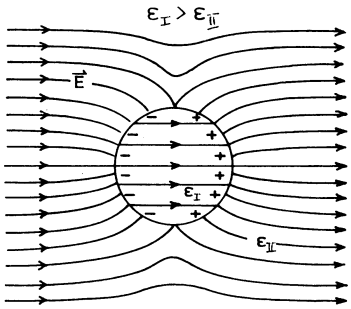
$$\lambda^{\mathrm{II}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}R^3E_0\quad . \tag{IV.57}$$



Zusammenfassend stellt sich die Lösung dar als

$$\Phi^{\mathrm{I}}=-\frac{3\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}E_0x_1\qquad r\le R \tag{IV.58}$$

$$\Phi^{\mathrm{II}}=-E_0x_1+\frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}R^3E_0\frac{x_1}{r^3}\qquad r\ge R\quad . \tag{IV.59}$$



Für das Feld folgt

$$\underline{E}^{\mathrm{I}}=\frac{3\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}\underline{E}_0 \tag{IV.60}$$

$$\underline{E}^{\mathrm{II}}=\underline{E}_0-\frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}\frac{R^3}{r^3}E_0\begin{pmatrix}1-\frac{3x_1^2}{r^2}\\ -\frac{3x_2x_1}{r^2}\\ -\frac{3x_3x_1}{r^2}\end{pmatrix}\quad . \tag{IV.61}$$

Der rechte Term von $\underline{E}^{\mathrm{II}}$ entspricht einem Dipolfeld, denn wir können ein Dipolmoment

$$\underline{p}=4\pi R^3\frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}-\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}+2\varepsilon_{\mathrm{II}}}\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{II}}E_0\underline{e}_1 \tag{IV.62}$$

einführen, woraus

$$\underline{E}^{\mathrm{II}}=\underline{E}_0+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{II}}r^3}\left(\frac{3(\underline{p}\cdot\underline{x})\underline{x}}{r^2}-\underline{p}\right) \tag{IV.63}$$

folgt. Abgesehen vom Hintergundfeld $\underline{E}_0$ ist dies gerade die Beziehung (IV.23).

1.4.3 Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum

Siehe Übungsaufgabe

1.5 Elektrostatische Energie eines Systems von Punktladungen

Wir betrachten ein Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε, in das die N Punktladungen e_A am jeweiligen Ort $\underline{x}_A$ eingelagert sind.

Die Ladungsdichte lautet

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{A=1}^{N} e_A \delta(\underline{x} - \underline{x}_A) \quad . \tag{IV.64}$$

Die elektrostatische Energie berechnet sich zu

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \underline{E}\cdot\underline{D}\,dV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\int_{V_\infty} \underline{E}^2\,dV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\int_{V_\infty} (\partial_{\underline{x}}\Phi)^2\,dV \quad . \tag{IV.65}$$

Wir verwenden die Identität

$$\partial_{\underline{x}}(\Phi\partial_{\underline{x}}\Phi) = (\partial_{\underline{x}}\Phi)^2 + \Phi\partial_{\underline{x}}^2\Phi \quad , \tag{IV.66}$$

sowie

$$\partial_{\underline{x}}^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon} \tag{IV.67}$$

und erhalten

$$U = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\int_{V_\infty} \partial_{\underline{x}}(\Phi\partial_{\underline{x}}\Phi)\,dV + \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\int_{V_\infty} \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho\Phi\,dV \quad . \tag{IV.68}$$

Auf den ersten Term wird der Gaußsche Satz angewendet. Auf der im Unendlichen liegenden Grenzfläche von V_∞ verschwindet $\Phi\partial_{\underline{x}}\Phi$ wie $1/r^3$ und der Term entfällt. Somit gilt

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \rho\Phi\,dV \quad . \tag{IV.69}$$

Für Φ kann eingesetzt werden

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,dV' \quad , \tag{IV.70}$$

und U läßt sich schreiben als

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{V'_\infty}\int_{V_\infty} \frac{\rho(\underline{x})\cdot\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,dV\,dV' \quad . \tag{IV.71}$$

Einsetzen der Ladungsdichte (IV.64) liefert zunächst

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{A,B=1}^{N} \frac{e_A\cdot e_B}{|\underline{x}_A - \underline{x}_B|} \quad . \tag{IV.72}$$

Diese Summe für U enthält offensichtlich divergierende Summanden; alle Terme mit $\underline{x}_A = \underline{x}_B$ werden unendlich. Um diese Terme zu verstehen, betrachten wir ein System aus nur einem Teilchen ($N = 1$). Dann gilt

$$U_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e_1^2}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_1|} \to \infty \quad . \tag{IV.73}$$

Das Teilchen befindet sich in seinem eigenen Feld, und diese „Selbstenergie“ ist für Punktteilchen offensichtlich unendlich. Physikalisch interessant ist die Wechselwirkungsenergie zwischen den Ladungen. Diese erhält man aus U, indem man die Selbstenergie einfach wegläßt (Renormierung):

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{\substack{A,B=1 \\ A\neq B}}^{N} \frac{e_A e_B}{|\underline{x}_A - \underline{x}_B|} \quad . \tag{IV.74}$$

Für zwei Ladungen folgt damit

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{e_1e_2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2|}+\frac{e_2e_1}{|\underline{x}_2-\underline{x}_1|}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e_1e_2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2|} \quad . \tag{IV.75}$$

Dieses Ergebnis können wir jetzt folgendermaßen interpretieren: Die Punktladung e_1 erzeugt das Potential

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e_1}{|\underline{x}-\underline{x}_1|} \quad .$$

Die potentielle Energie der Punktladung e_2 am Ort $\underline{x}_2$ ist nun

$$U = e_2\Phi(\underline{x}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e_1e_2}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2|} \quad .$$

Wir stellen jetzt noch ein Gedankenexperiment vor, daß U ermittelt und die Selbstenergie von Punktladungen vermeidet.

1. Die Ladungen e_A seien zunächst unendlich weit voneinander entfernt. Der Raum ist feldfrei und das Potential ist Null. Es ist die Arbeit zu berechnen, um die Ladungen aus dem Unendlichen an die Orte $\underline{x}_A$ zu bringen. Die aufgewendete Arbeit entspricht der potentiellen Energie der Ladungsverteilung.

2. Die Ladung e_1 wird aus dem Unendlichen nach $\underline{x}_1$ gebracht. Hierzu ist keine Arbeit aufzuwenden, da der Raum noch feldfrei ist, q_1 ruft aber das Potential

   $$\Phi_1(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1}{|\underline{x}-\underline{x}_1|}$$

   hervor.

3. e_2 wird nach $\underline{x}_2$ gebracht. Hierzu ist Arbeit gegen Φ_1 zu verrichten. Diese Arbeit ist

   $$U_2 = q_2 \cdot \Phi_1(\underline{x}_2) \quad .$$

4. e_3 wird nach $\underline{x}_3$ gebracht. Es ist Arbeit gegen Φ_1 und Φ_2 zu verrichten:

   $$U_3 = e_3\left(\Phi_1(\underline{x}_3)+\Phi_2(\underline{x}_3)\right) \quad ,$$

   wobei Φ_2 durch

   $$\Phi_2(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e_2}{|\underline{x}-\underline{x}_2|}$$

   gegeben ist.

5. Für weitere Ladungen verläuft alles entsprechend. Das Heranbringen der Ladung B erfordert die Arbeit

   $$U_B = e_B\left(\Phi_1(\underline{x}_B)+\Phi_2(\underline{x}_B)+\ldots+\Phi_{B-1}(\underline{x}_B)\right)$$
   $$U_B = e_B\sum_{A=1}^{B-1}\Phi_A(\underline{x}_B) \quad .$$

6. Die gesamte potentielle Energie U ergibt sich als Summe der U_B:

$$U = \sum_{B=2}^{N} U_B = \sum_{B=2}^{N} e_B \sum_{A=1}^{B-1} \Phi_A(\underline{x}_B) \quad .$$

7. Wir ersetzen die Potentiale Φ_A durch

$$\Phi_A(\underline{x}_B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e_A}{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}$$

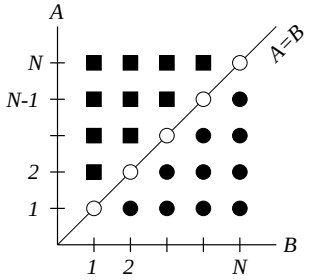
und erhalten

$$U = \sum_{B=2}^{N} \sum_{A=1}^{B-1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e_A e_B}{|\underline{x}_A - \underline{x}_B|} \quad .$$

Die Doppelsumme läßt sich umschreiben in

$$U = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{N} \sum_{\substack{B=1 \\ B\neq A}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e_A e_B}{|\underline{x}_A - \underline{x}_B|} \quad .$$

Diese potentielle Energie stimmt aber mit dem Ausdruck (IV.74) überein, der nach der Renormierung erhalten wurde.



• : Terme in $\sum_{B=2}^{N} \sum_{A=1}^{B-1} \ldots$

■ : wie • mit $A \leftrightarrow B$

○ : nicht auftretende Terme

$$\Rightarrow \quad \sum_{B=2}^{N} \sum_{A=1}^{B-1} \ldots = \frac{1}{2} \sum_{\substack{A,B=1 \\ A\neq B}}^{N} \ldots$$

Dieses Gedankenexperiment ergibt darüberhinaus eine schlüssige Erklärung, wieso die Selbstenergie von Punktladungen divergiert. Die Selbstenergie eines Punktteilchens entspricht dem Arbeitsaufwand, um dieses aus einer unendlich verdünnten kontinuierlichen Ladungswolke punktförmig zusammenzuballen.

1.6 Elektrostatische Energie eines Systems von Leitern

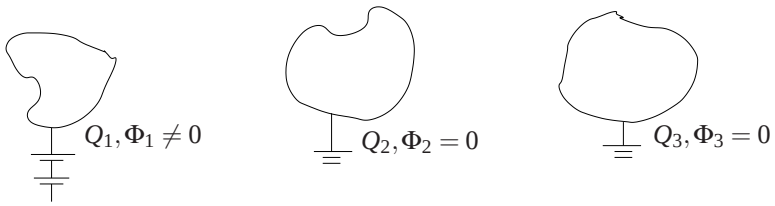
Wir betrachten N Leiter jeweils endlicher Ausdehnung. Der A-te Leiter trage die Ladung Q_A. Zwischen den Ladungen Q_A und den Potentialen Φ_A bestehe ein linearer Zusammenhang

$$Q_A = \sum_{B=1}^{N} C_{AB} \Phi_B$$

mit konstanten Größen C_{AB}. Dieser Zusammenhang wird durch Spannungs - Ladungs - Beziehung an Kondensatoren nahe gelegt. Die Koeffizientenmatrix heißt Kapazitätsmatrix. Sie wird durch die spezielle Anordnung der Leiter festgelegt.
Das Potential im Unendlichen sei 0. Wenn alle Leiter geerdet sind ($\Phi_A = 0$), so sind auch alle Ladungen $Q_A = 0$.

Wird nun der erste Leiter auf das Potential Φ_1 gebracht, während alle anderen Leiter geerdet bleiben, so hängt die Ladung $Q_A^{(1)}$, die auf den A-ten Leiter strömt, in linearer Form von Φ_1 ab:

$$Q_A^{(1)} = C_{A1} \Phi_1 \quad .$$



Wird nun der zweite Leiter auf das Potential Φ_2 gebracht, so strömt die zusätzliche Ladung

$$Q_A^{(2)} = C_{A2}\,\Phi_2$$

auf den A-ten Leiter usw. Insgesamt ergibt sich

$$Q_A = \sum_{B=1}^{N} C_{AB}\,\Phi_B \quad .$$

Zur Berechnung der Energie des Systems schließen wir an (IV.69) an und formen um zu

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\,\Phi\,dV = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N}\int_{V_A} \rho_A\,\Phi_A\,dV \tag{IV.76}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N}\int_{V_A} \rho_A\,dV\,\Phi_A = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} Q_A\,\Phi_A \quad . \tag{IV.77}$$

Somit folgt

$$U = \frac{1}{2}\sum_{A,B=1}^{N} C_{AB}\,\Phi_A\,\Phi_B \quad .$$

Bemerkung:

- Im vorhergehendem Abschnitt zur Energie eines Systems von Punktladungen war die Beziehung

  $$U = \frac{1}{2}\int \rho\,\Phi\,dV$$

  noch gemeinsame Station verglichen mit dem jetzigen Abschnitt.
  Im vorhergehendem Abschnitt wurde das Potential zugunsten der Ladungen ersetzt. Im jetzigen Abschnitt wurden die Ladungen zugunsten des Potentials ersetzt.

1.7 Elektrische Multipole

Die Multipolentwicklung der elektromagnetischen Potentiale wurde im allgemeinem zeitabhängigen Fall im Abschnitt II.10 durchgeführt. Mit zunehmender Multipol-Ordnung wurden die Terme recht komplex. Wir haben uns deshalb auf Dipole als höchste Ordnung beschränkt. Wir wollen jetzt noch einmal den wesentlich einfacheren elektrostatischen Fall betrachten, dafür aber die Entwicklung bis zum Quadrupol treiben.

Wir betrachten eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung ρ. Das Potential Φ ist dann

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3V' \quad .$$

$\Phi(\underline{x})$ bzw. $\underline{E}(\underline{x})$ soll nun im Fernfeld von ρ untersucht werden, d.h. weit weg von der Ladungsverteilung.

Es möge somit gelten $|\underline{x}| \gg |\underline{x}'|$, wenn $\underline{x}'$ und der Koordinatenursprung innerhalb der Ladungsverteilung liegen. Für diese Situation läßt sich obiges Integral näherungsweise auswerten. Kernpunkt ist dabei eine Taylor-Reihenentwicklung von $\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$ in der Umgebung $\underline{x}' = 0$. Für eine beliebige Funktion $f(\underline{x}-\underline{x}')$ gilt

$$f(\underline{x}-\underline{x}') = f(\underline{x}) + \partial_{x_a} f(\underline{x})(-x'_a) + \frac{1}{2}\partial_{x_a}\partial_{x_b} f(\underline{x})(-x'_a)(-x'_b) + \dots \tag{IV.78}$$

Anzuwenden ist die Summenkonvention. Speziell folgt damit

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{r} - \left(\partial_{x_a}\frac{1}{r}\right)x'_a + \frac{1}{2}\left(\partial_{x_a}\partial_{x_b}\frac{1}{r}\right)x'_a x'_b + \dots \tag{IV.79}$$

Setzen wir diese Reihe in das Potential ein, so können wir schreiben

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\Bigg\{&\frac{1}{r}\int \rho(\underline{x}')\,dV' \\ &-\partial_{x_a}\frac{1}{r}\int x'_a\rho(\underline{x}')\,dV' \\ &+\frac{1}{2}\partial_{x_a}\partial_{x_b}\frac{1}{r}\int x'_a x'_b\rho(\underline{x}')\,dV' + \dots\Bigg\}\end{aligned} \tag{IV.80}$$

Zunächst werden die Ableitungen von $1/r$ ausgerechnet. Es folgt

$$\partial_{x_a}\frac{1}{r} = -\frac{x_a}{r^3} \quad \text{oder kompakt} \quad \partial_{\underline{x}}\frac{1}{r} = -\frac{\underline{x}}{r^3} \quad ,$$

$$\partial_{x_a}\partial_{x_b}\frac{1}{r} = -\partial_{x_b}\frac{x_a}{r^3} = -\frac{\delta_{ab}}{r^2} + 3\frac{x_a}{r^4}\frac{2x_b}{2r} = \frac{3x_a x_b - r^2\delta_{ab}}{r^5} \quad .$$

Die Integralausdrücke sind uns zum Teil schon bekannt. So sind

$$Q = \int \rho(\underline{x}')\,dV'$$

die Gesamtladung und

$$\underline{p} = \int \underline{x}'\rho(\underline{x}')\,dV'$$

das in 1.2.2 eingeführte Dipolmoment der Ladungsverteilung. Der nächste Term steht erwartungsgemäß in Zusammenhang mit dem Quadrupolmoment. Dies ist ein Tensor 2. Stufe und ist definiert durch

$$\underline{\underline{q}} = \int \left(3\underline{x}'\otimes\underline{x}' - r'^2\,\underline{\underline{1}}\right)\rho(\underline{x}')dV' \tag{IV.81}$$

bzw. in Komponenten

$$q_{ab} = \int (3x'_a x'_b - r'^2\delta_{ab})\rho(\underline{x}')\,dV' \quad . \tag{IV.82}$$

Damit läßt sich das dritte Integral in (IV.80) schreiben als

$$\begin{aligned}\int x'_a x'_b\rho(\underline{x}')\,dV' &= \frac{1}{3}\int\left(3x'_a x'_b - r'^2\delta_{ab}\right)\rho(\underline{x}')\,dV' + \frac{1}{3}\delta_{ab}\int r'^2\rho(\underline{x}')\,dV' \\ &= \frac{1}{3}q_{ab} + \frac{1}{3}\delta_{ab}\int r'^2\rho(\underline{x}')\,dV' \quad .\end{aligned} \tag{IV.83}$$

Faßt man zusammen, folgt für das Potential

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\Bigg\{&\frac{Q}{r} + \frac{\underline{x}\cdot\underline{p}}{r^3} + \frac{1}{6}\frac{3x_a x_b - r^2\delta_{ab}}{r^5}q_{ab} \\ &+\frac{1}{6}\frac{3x_a x_b - r^2\delta_{ab}}{r^5}\delta_{ab}\int r'^2\rho(\underline{x}')\,dV' + \dots\Bigg\} \quad .\end{aligned} \tag{IV.84}$$

Wegen

$$(3x_a x_b - r^2\delta_{ab})\delta_{ab} = 3x_a x_a - r^2\delta_{aa} = 3r^2 - 3r^2 = 0$$

folgt schließlich

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\underline{x}}{r^3}\cdot\underline{p} + \frac{1}{6}\mathrm{tr}\left(\frac{3\underline{x}\otimes\underline{x} - r^2\underline{\underline{1}}}{r^5}\cdot\underline{\underline{q}}\right) + \ldots\right\} \tag{IV.85}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\underline{x}}{r^3}\cdot\underline{p} + \frac{1}{2r^5}\left(x_a x_b q_{ba} - r^2\delta_{ab}q_{ba}\right) + \ldots\right\} \tag{IV.86}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\underline{x}}{r^3}\cdot\underline{p} + \frac{1}{2r^5}\left(x_a q_{ab} x_b - r^2\underbrace{q_{aa}}_{=0}\right) + \ldots\right\} \tag{IV.87}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\underline{x}}{r^3}\cdot\underline{p} + \frac{1}{2r^5}\underline{x}^T\,\underline{\underline{q}}\,\underline{x} + \ldots\right\} \quad . \tag{IV.88}$$

($\underline{x}\otimes\underline{x} = x_a x_b$ bezeichnet das dyadische Produkt und $\underline{\underline{1}}$ den Einheitstensor). Momente höherer Ordnung fallen mit zunehmender Entfernung r rasch ab.

Der Quadrupoltensor $\underline{\underline{q}}$ ist offensichtlich symmetrisch ($q_{ab} = q_{ba}$) und spurfrei ($q_{aa} = 0$). Er enthält damit 5 unabhängige Komponenten. Die Spezialisierung auf konkrete Ladungsverteilungen erfolgt in den Übungsaufgaben.

2 Statisches magnetisches Feld

2.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen

Es verschwinden die zeitlichen Ableitungen und die elektrischen Größen. Darüberhinaus wollen wir für ein statisches Magnetfeld (im Unterschied zu einem stationären Magnetfeld) *keine* Ströme zulassen:

$$\partial_t\underline{B} = 0 \quad , \quad \underline{E} = 0 \quad , \quad \underline{D} = 0 \quad , \quad \rho = 0 \quad , \quad \underline{j} = 0 \quad . \tag{IV.89}$$

Es verbleiben die Gleichungen

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{H} = 0 \tag{IV.90}$$

$$\partial_{\underline{x}}\underline{B} = 0 \quad . \tag{IV.91}$$

Für die Lösung dieser Gleichungen kann man zwei Wege einschlagen. Entweder man benutzt das Vektorpotential $\underline{A}$ oder man führt ein neues magnetisches skalares Potential Ψ ein.

(a) Benutzen des Vektorpotentials $\underline{A}$

Wie bekannt setzen wir

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}}\times\underline{A} \quad .$$

Für den Zusammenhang zwischen $\underline{H}$ und $\underline{B}$ nutzen wir

$$\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M}) \quad .$$

Dann folgt

$$\partial_{\underline{x}}\times\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\partial_{\underline{x}}\times\underline{B} - \partial_{\underline{x}}\times\underline{M}$$

$$0 = \frac{1}{\mu_0}\partial_{\underline{x}}\times\partial_{\underline{x}}\times\underline{A} - \partial_{\underline{x}}\times\underline{M}$$

$$0 = \partial_{\underline{x}}\,\partial_{\underline{x}}\underline{A} - \partial_{\underline{x}}^2\underline{A} - \mu_0\partial_{\underline{x}}\times\underline{M}$$

In Coulombeichung $\partial_{\underline{x}}\underline{A} = 0$ gilt damit

$$\partial_{\underline{x}}^2\underline{A} = -\mu_0\partial_{\underline{x}}\times\underline{M} \quad . \tag{IV.92}$$

(b) Einführung des skalaren magnetischen Potentials Ψ

Die Gleichung $\partial_{\underline{x}}\times\underline{H} = 0$ legt den Ansatz

$$\underline{H} = -\partial_{\underline{x}}\Psi \tag{IV.93}$$

nahe. Für Materialien, die der Materialgleichung

$$\underline{B} = \mu_0\mu\underline{H}$$

unterliegen, gilt dann

$$\underline{B} = -\mu_0\mu\partial_{\underline{x}}\Psi$$

und Divergenzbildung ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\partial_{\underline{x}}^2\Psi + \partial_{\underline{x}}\Psi\partial_{\underline{x}}\mu \quad , \\ \partial_{\underline{x}}^2\Psi &= -\partial_{\underline{x}}\Psi\cdot\partial_{\underline{x}}\ln\mu \quad . \end{aligned} \tag{IV.94}$$

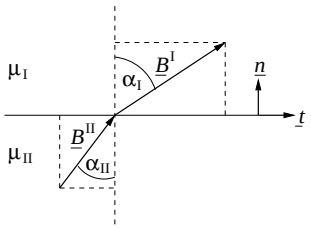
Die Analogie zur Elektrostatik ist hier offenkundig. Viele Beispiele lassen sich deshalb in die Magnetostatik formal übertragen.

2.2 Brechungsgesetz für B-Feldlinien

Wir betrachten eine Grenzfläche zweier magnetischer Materialien, die jeweils durch

$$\underline{B} = \mu_0\mu\underline{H}$$

beschrieben werden.



Es gelten die Übergangsbedingungen

$$B_n^{\mathrm{I}} = B_n^{\mathrm{II}} \quad , \quad H_t^{\mathrm{I}} = H_t^{\mathrm{II}} \quad . \tag{IV.95}$$

Man liest ab

$$\tan\alpha_{\mathrm{I}} = \frac{B_t^{\mathrm{I}}}{B_n^{\mathrm{I}}} \quad , \quad \tan\alpha_{\mathrm{II}} = \frac{B_t^{\mathrm{II}}}{B_n^{\mathrm{II}}} \quad .$$

Folglich erhält man

$$\frac{\tan\alpha_{\mathrm{I}}}{\tan\alpha_{\mathrm{II}}} = \frac{B_t^{\mathrm{I}}B_n^{\mathrm{II}}}{B_n^{\mathrm{I}}B_t^{\mathrm{II}}} = \frac{\mu_0\mu_{\mathrm{I}}H_t^{\mathrm{I}}}{\mu_0\mu_{\mathrm{II}}H_t^{\mathrm{II}}} = \frac{\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{II}}} \quad . \tag{IV.96}$$

2.3 Feld eines magnetischen Dipols

Das Fernfeld des elektrischen Dipols hatten wir in Abschnitt 1.2.2 zu

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\left(\frac{3(\underline{p}\cdot\underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{p}\right)$$

berechnet. Das elektrische Dipolmoment ist dabei von $-$ nach $+$ gerichtet und punktförmig; es fügt sich gleichsinnig in die $\underline{E}$-Feldlinien ein.

Formale Übertragung auf einen magnetischen Dipol ergibt

$$\underline{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\left(\frac{3(\underline{m}\cdot\underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{m}\right) \quad . \tag{IV.97}$$

$\underline{m}$ ist das magnetische Dipolmoment. Die Ersetzung $1/(\varepsilon_0\varepsilon) \to \mu_0\mu$ ist durch $\underline{E} = \underline{D}/(\varepsilon_0\varepsilon)$ und $\underline{B} = \mu_0\mu\underline{H}$ begründet.

Um dieses durch Analogie-Betrachtung erhaltene Ergebnis auch zu begründen, wird das Feld nun berechnet. Wir greifen auf die Multipol-Entwicklung im Abschnitt 10 zurück und spezialisieren das Vektorpotential in Gleichung (II.164) für das statische Magnetfeld zu

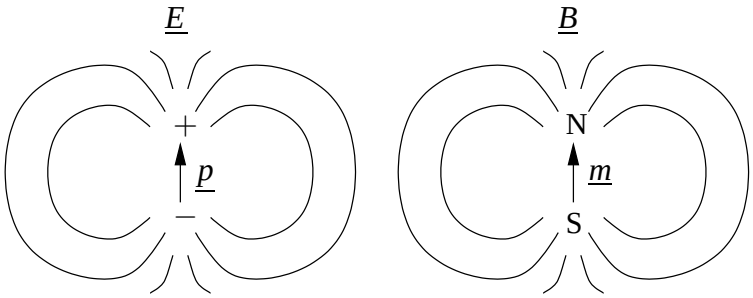
$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{\underline{m}\times\underline{x}}{r^3} \quad . \tag{IV.98}$$

Die Berechnung der Rotation liefert:

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{x}}\times\frac{\underline{m}\times\underline{x}}{r^3} &= \varepsilon_{abc}\partial_{x_b}\frac{\varepsilon_{cde}m_d x_e}{r^3} \\
&= (\delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd})\,m_d\frac{\delta_{eb}r^3 - x_e 3r^2\frac{x_b}{r}}{r^6} \\
&= m_a\frac{3r^3}{r^6} - m_a\frac{r^3}{r^6} - \frac{3}{r^5}m_a r^2 + \frac{3}{r^5}m_b x_b x_a \\
\partial_{\underline{x}}\times\frac{\underline{m}\times\underline{x}}{r^3} &= \frac{1}{r^3}\left(\frac{3(\underline{m}\underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{m}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{IV.99}$$

Dann folgt

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\left(\frac{3(\underline{m}\underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{m}\right) \quad . \tag{IV.100}$$



2.4 Homogen magnetisierte Kugel

Die Situation ist teilweise äquivalent zur dielektrischen Kugel in Abschnitt 1.4.2. Dipolartige Lösung im Außenraum und homogenes Feld in der Kugel können deshalb auch hier zum Ansatz gebracht werden.

Aus der Skizze liest man ab:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_1 &= \cos\theta\cdot\underline{e}_r - \sin\theta\cdot\underline{e}_\theta \\
\underline{M} &= \begin{cases} M_0\underline{e}_1 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}
\end{aligned}$$

Feldgleichung:

$$\partial_{\underline{x}}^2\Psi = 0 \tag{IV.101}$$

Randbedingungen:

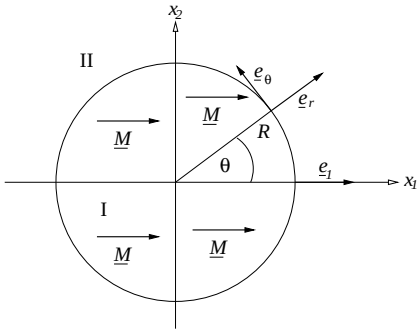
$$B_n^{\mathrm{I}}\big|_R = B_n^{\mathrm{II}}\big|_R \tag{IV.102}$$

$$H_t^{\mathrm{I}}\big|_R = H_t^{\mathrm{II}}\big|_R \quad \text{bzw.} \quad \underline{H}^{\mathrm{I}} \cdot \underline{e}_\theta\big|_R = \underline{H}^{\mathrm{II}} \cdot \underline{e}_\theta\big|_R \tag{IV.103}$$

$$\lim_{r\to\infty} \underline{B} = 0 \tag{IV.104}$$

Innerhalb der Kugel gilt

$$\underline{B}^{\mathrm{I}} = \mu_0(\underline{H}^{\mathrm{I}} + \underline{M}) \quad . \tag{IV.105}$$



Da Isotropie zugrunde gelegt wird, sind alle Vektoren gleichgerichtet. Die Feldgleichung liefert eine lineare Lösung für Ψ woraus

$$\underline{B}^{\mathrm{I}} = \lambda^{\mathrm{I}}\underline{e}_1 = \lambda^{\mathrm{I}}\cos\theta\,\underline{e}_r - \lambda^{\mathrm{I}}\sin\theta\,\underline{e}_\theta \tag{IV.106}$$

$$\underline{H}^{\mathrm{I}} = \left(\frac{1}{\mu_0}\lambda^{\mathrm{I}} - M_0\right)\underline{e}_1 = \left(\frac{\lambda^{\mathrm{I}}}{\mu_0} - M_0\right)(\cos\theta\,\underline{e}_r - \sin\theta\,\underline{e}_\theta) \tag{IV.107}$$

folgt.

Im Außenraum setzen wir an

$$\Psi^{\mathrm{II}} = \lambda^{\mathrm{II}}\frac{x_1}{r^3} = \lambda^{\mathrm{II}}\frac{\cos\theta}{r^2} \quad . \tag{IV.108}$$

Dem entspricht

$$\underline{H}^{\mathrm{II}} = -\partial_{\underline{x}}\Psi^{\mathrm{II}} = -\partial_r\Psi^{\mathrm{II}}\underline{e}_r - \frac{1}{r}\partial_\theta\Psi^{\mathrm{II}}\underline{e}_\theta \tag{IV.109}$$

$$\underline{H}^{\mathrm{II}} = 2\lambda^{\mathrm{II}}\frac{\cos\theta}{r^3}\underline{e}_r + \lambda^{\mathrm{II}}\frac{\sin\theta}{r^3}\underline{e}_\theta \tag{IV.110}$$

$$\underline{B}^{\mathrm{II}} = \mu_0\underline{H}^{\mathrm{II}} \quad . \tag{IV.111}$$

Die freien Parameter λ^{I} und λ^{II} sind aus den Randbedingungen zu ermitteln.

(IV.102) liefert

$$\lambda^{\mathrm{I}}\cos\theta = 2\mu_0\lambda^{\mathrm{II}}\frac{\cos\theta}{R^3}$$

und aus (IV.103) folgt

$$-\left(\frac{\lambda^{\mathrm{I}}}{\mu_0} - M_0\right)\sin\theta = \lambda^{\mathrm{II}}\frac{\sin\theta}{R^3} \quad .$$

Das Gleichungssystem für λ^{I} und λ^{II}

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\mu_0}{R^3} \\ 1 & \frac{\mu_0}{R^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{\mathrm{I}} \\ \lambda^{\mathrm{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 M_0 \end{pmatrix} \tag{IV.112}$$

hat die Lösung

$$\lambda^{\mathrm{I}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{2\mu_0}{R^3} \\ \mu_0 M_0 & \frac{\mu_0}{R^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2\mu_0}{R^3} \\ 1 & \frac{\mu_0}{R^3} \end{vmatrix}} = \frac{2\frac{\mu_0^2 M_0}{R^3}}{\frac{\mu_0}{R^3} + \frac{2\mu_0}{R^3}} = \frac{2}{3}\mu_0 M_0 \tag{IV.113}$$

$$\lambda^{\mathrm{II}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mu_0 M_0 \end{vmatrix}}{3\mu_0/R^3} = \frac{\mu_0 M_0}{3\mu_0/R^3} = \frac{R^3}{3}M_0 \quad . \tag{IV.114}$$

Die Innenraumlösung lautet somit

$$\underline{B}^{\mathrm{I}} = \frac{2}{3}\mu_0 M_0 \underline{e}_1 = \frac{2}{3}\mu_0 \underline{M} \tag{IV.115}$$

$$\underline{H}^{\mathrm{I}} = \left(\frac{2}{3} - 1\right) M_0 \underline{e}_1 = -\frac{1}{3}\underline{M} \quad . \tag{IV.116}$$

Bemerkenswert ist die Antiparallelität $\underline{B}^{\mathrm{I}} \uparrow\downarrow \underline{H}^{\mathrm{I}}$

Im Außenraum lautet die Lösung

$$\underline{B}^{\mathrm{II}} = \frac{\mu_0 R^3}{3}\frac{M_0}{r^3}\left(2\cos\theta \underline{e}_r + \sin\theta \underline{e}_\theta\right) \quad . \tag{IV.117}$$

Dies ist aber ein Dipolfeld. Um an die bekannte Form in den Abschnitten 1.2.2, 1.4.2 und 2.3 anzuschließen, formen wir weiter um:

$$\sin\theta \underline{e}_\theta = \cos\theta \underline{e}_r - \underline{e}_1$$

ersetzt gibt

$$\begin{aligned} 2\cos\theta \underline{e}_r + \sin\theta \underline{e}_\theta &= 3\cos\theta \underline{e}_r - \underline{e}_1 \\ &= \frac{3r\cos\theta\, r\underline{e}_r}{r^2} - \underline{e}_1 \\ &= \frac{3x_1 \underline{x}}{r^2} - \underline{e}_1 = \frac{3(\underline{e}_1 \cdot \underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{e}_1 \end{aligned}$$

und somit

$$\underline{B}^{\mathrm{II}} = \frac{\mu_0 R^3}{3}\frac{M_0}{r^3}\left(\frac{3(\underline{e}_1 \cdot \underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{e}_1\right) \quad . \tag{IV.118}$$

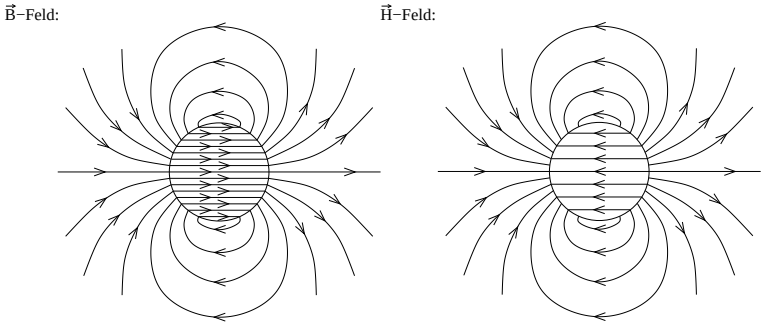
über

$$\underline{m} = \frac{4\pi}{3}R^3 \underline{M} = \frac{4\pi}{3}R^3 M_0 \underline{e}_1 \tag{IV.119}$$

führen wir das Dipolmoment ein und erhalten mit

$$\underline{B}^{\mathrm{II}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(\frac{3(\underline{m} \cdot \underline{x})\underline{x}}{r^2} - \underline{m}\right) \tag{IV.120}$$

die bekannte Form.



3 Stationäres magnetisches Feld

3.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen

Im Unterschied zum statischen magnetischen Feld sind hier Ströme zugelassen. Somit gilt

$$\partial_t \underline{B} = 0 \quad , \quad \underline{E} = 0 \quad , \quad \underline{D} = 0 \quad , \quad \rho = 0 \quad , \quad \underline{j} \neq 0 \quad . \tag{IV.121}$$

Es verbleiben die Gleichungen

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \underline{j} \qquad \text{(auch Oerstedsches Gesetz genannt)} \tag{IV.122}$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0 \quad . \tag{IV.123}$$

Die Ströme $\underline{j}$ sollen sich in einem ruhenden Leitersystem befinden. Innerhalb der Leiter gelte das Ohmsche Gesetz

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad , \tag{IV.124}$$

im Leiter darf somit $\underline{E} \neq 0$ sein, und obige Forderung $\underline{E} = 0$ gilt nur im Außenraum. Für die Materialgleichungen setzen wir ein isotropes und homogenes Standardmedium voraus, d.h.

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H} \quad . \tag{IV.125}$$

Mit

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} = \mu_0 \mu \underline{H}$$

folgt

$$\partial_{\underline{x}}^2 \underline{A} = -\mu_0 \mu \underline{j} \tag{IV.126}$$

mit der wohlbekannten inhomogenen Lösung

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} dV' \quad . \tag{IV.127}$$

3.2 Das Biot-Savart-Gesetz

Aus dem oben angegebenem Vektorpotential berechnet man die magnetische Induktion wie folgt:

$$\underline{B}(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}(\underline{x})$$

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int \partial_{\underline{x}} \times \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} dV' \quad .$$

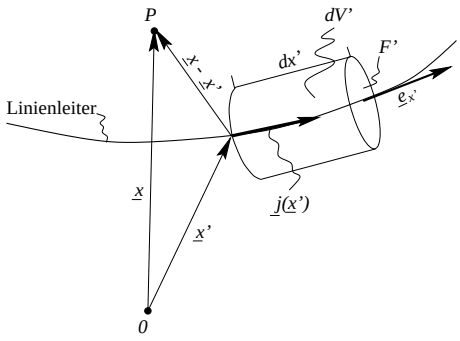
Der Operator rot wirkt auf $\underline{x}$ und nicht auf $\underline{x}'$, so daß

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} &= \partial_{\underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \times \underline{j}(\underline{x}') \\ &= -\frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \times \underline{j}(\underline{x}') \end{aligned} \tag{IV.128}$$

und damit das Biot-Savart-Gesetz

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} dV' \tag{IV.129}$$

folgt.



P Aufpunkt
$\underline{j}(\underline{x}') = j(\underline{x}') \cdot \underline{e}_{x'}$
$dV' = F' \cdot dx'$
$J(\underline{x}') = j(\underline{x}') F'$
$d\underline{x}' = dx' \underline{e}_{x'}$

Wir spezialisieren das Gesetz noch auf einen linienförmigen Leiter. Dann gilt

$$\underline{j}(\underline{x}')\, dV' = J(\underline{x}')\, d\underline{x}' \quad . \tag{IV.130}$$

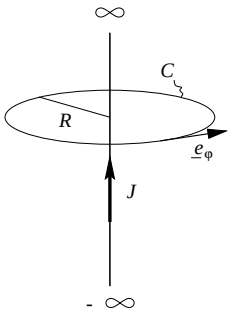
Folglich erhält man

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int J(\underline{x}') \frac{d\underline{x}' \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \tag{IV.131}$$

und die $\underline{B}$-Berechnung ist auf ein Kurvenintegral zurückgeführt.

3.3 Feldberechnungen

3.3.1 Unendlich langer Draht



Wir lösen die Aufgabe auf zwei unterschiedlichen Wegen:

(a) ohne Biot-Savart-Gesetz, aber mit Voraussetzungen an die Symmetrie der Lösung.

(b) mit Biot-Savart-Gesetz ohne weitere Voraussetzungen.

(a) Die Lösung sei rotationssymmetrisch von der Form

$$\underline{H} = H_\varphi \underline{e}_\varphi \quad .$$

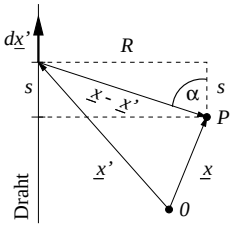
Das Durchflutungsgesetz liefert

$$\int \partial_{\underline{x}} \times \underline{H}\, d\underline{S} = \oint \underline{H}\, d\underline{x} = \int \underline{j}\, d\underline{S} = J$$
$$= \oint H_\varphi ds = \int_0^{2\pi} H_\varphi \cdot R\, d\varphi = H_\varphi \cdot R \cdot 2\pi$$

und somit

$$H_\varphi = \frac{J}{2\pi R} \quad . \tag{IV.132}$$

(b) Zur Berechnung des Kurvenintegrals im Biot-Savart-Gesetz orientieren wir uns an der Skizze:



$$\sin\alpha = \frac{R}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$
$$\tan\alpha = \frac{R}{s}$$
$$|d\underline{x}'| = ds$$

Das Vektorprodukt $d\underline{x}' \times (\underline{x} - \underline{x}')$ läßt nur eine $\underline{e}_\varphi$-Komponente für $\underline{B}$ zu:

$$\underline{B} = B_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi \quad . \tag{IV.133}$$

Dann folgt

$$B_\varphi = \frac{\mu\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds \cdot |\underline{x} - \underline{x}'| \sin\alpha}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \quad ,$$
$$= \frac{\mu\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha\, ds}{|\underline{x} - \underline{x}'|^2} = \frac{\mu\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3\alpha}{R^2}\, ds \quad .$$

Die ds-Integration wird vermittels

$$\begin{aligned} s &= \frac{R}{\tan\alpha} = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \\ ds &= R\frac{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha = -R\frac{1}{\sin^2\alpha}d\alpha \end{aligned} \tag{IV.134}$$

in eine $d\alpha$-Integration überführt.

$$\begin{aligned} B_\varphi &= -\frac{\mu\mu_0 J}{4\pi}\int_\pi^0 \frac{\sin^3\alpha}{R^2}R\frac{1}{\sin^2\alpha}d\alpha = -\frac{\mu\mu_0 J}{4\pi}\int_\pi^0 \frac{\sin\alpha}{R}d\alpha \\ &= \frac{\mu\mu_0 J}{4\pi}\frac{\cos\alpha}{R}\Big|_\pi^0 = \frac{\mu\mu_0 J}{2\pi R} \quad . \end{aligned} \tag{IV.135}$$

Das Abklingverhalten des Feldes $\propto 1/R$ ist charakteristisch für effektiv zweidimensionale Situationen.

3.3.2 Ringspule

Wir betrachten eine Ringspule vom Radius R und Kerndicke d. Gesucht ist die magnetische Feldstärke $\underline{H}$ im Kern. Nach dem Oerstedschen Gesetz gilt differentiell

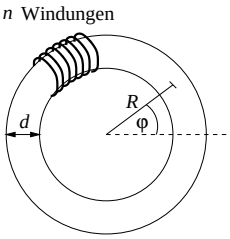
$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \underline{j}$$

und integral

$$\oint_C \underline{H} d\underline{x} = \int_S \underline{j}\cdot d\underline{S} \quad . \tag{IV.136}$$

Als Integrationsweg C wählen wir den Umfang des Kreises mit Radius R. Dort gelte

$$\underline{H} = H_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi \quad \text{mit } H_\varphi = \text{const.} \tag{IV.137}$$



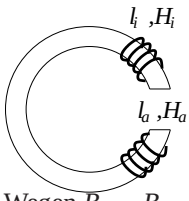
Durch die von C aufgespannte Fläche S fließt der Strom $n \cdot J$, wobei J der Spulenstrom ist. Es folgt somit

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi \cdot R\, d\varphi\, \underline{e}_\varphi = n \cdot J \tag{IV.138}$$

und schließlich

$$H_\varphi = \frac{nJ}{2\pi R} \quad . \tag{IV.139}$$

Die Überlegungen lassen sich leicht auch auf einen aufgeschnittenen Ring erweitern.



l_i : Länge ohne Spalt

l_a : Länge des Spaltes

Dann gilt

$$H_i \cdot l_i + H_a \cdot l_a = nJ \quad .$$

An den Rändern des Spaltes gelten die Übergangsbedingungen

$$B_{ni} = B_{na} \quad . \tag{IV.140}$$

Wegen $B_n = B_\varphi = \mu_0 \mu H_\varphi$ folgt

$$\mu_i H_i = \mu_a H_a \quad . \tag{IV.141}$$

Die magnetische Feldstärke im Spalt berechnet sich dann zu

$$\frac{\mu_a}{\mu_i} H_a l_i + H_a l_a = nJ \quad ,$$

$$H_a = \frac{nJ}{\mu_a/\mu_i \cdot l_i + l_a} \quad . \tag{IV.142}$$

Führen wir die Windungsdichte

$$N = \frac{n}{l_i} \tag{IV.143}$$

ein, so erhalten wir

$$H_a = \frac{NJ}{\frac{\mu_a}{\mu_i} + \frac{l_a}{l_i}} \quad . \tag{IV.144}$$

4 Quasistationäres elektromagnetisches Feld

4.1 Spezialisierung der Maxwell-Gleichungen

Die Felder dürfen sich langsam verändern, in dem Sinne, daß der Verschiebungsstrom $\partial_t \underline{D}$ vernachlässigt werden kann:

$$|\partial_t \underline{D}| \ll |\underline{j}| \quad . \tag{IV.145}$$

Die Grundgleichungen nehmen dann die Form

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \underline{j} \tag{IV.146}$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{D} = \rho \tag{IV.147}$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \tag{IV.148}$$

$$\partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0 \tag{IV.149}$$

an.

Insbesondere ist $\partial_t \underline{B}$ und damit auch $\underline{E}$ hier nicht vernachlässigbar. Bekanntlich können in Medien hoher Leitfähigkeit σ bereits kleine Felder $\underline{E}$ starke Stromdichten $\underline{j}$ und damit große Wirkungen erzielen. Derartige Effekte sind in dieser Beschreibung enthalten.

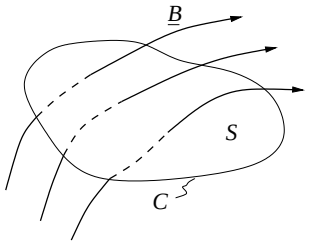
4.2 Magnetischer Fluß und Induktion

Das Faradaysche Induktionsgesetz

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$$

führt in seiner integralen Formulierung auf

$$\oint_C \underline{E}\, d\underline{x} = -d_t \int_S \underline{B}\, d\underline{S} = -d_t \Phi^m \quad , \qquad \text{(IV.150)}$$



wobei

$$\Phi^m = \int_S \underline{B}\, d\underline{S} \qquad \text{(IV.151)}$$

den magnetischen Fluß durch die Fläche S darstellt. Unter Benutzung des Vektorpotentials $\underline{A}$ formen wir um zu

$$\Phi^m = \int_S \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}\, d\underline{S} = \oint_C \underline{A}\, d\underline{x} \quad . \qquad \text{(IV.152)}$$

Für $\underline{A}$ benutzen wir

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\underline{j}(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, dV' \quad .$$

In dieser Darstellung ist die Retardierung der Zeit vernachlässigt. Formal gelangt man zu dieser Näherung für $c \to \infty$. Dies ist aber gerade konsistent mit der Annahme langsam veränderlicher Felder, für die von der endlichen Signalausbreitungsgeschwindigkeit abgesehen werden kann. Dann folgt weiter

$$\Phi^m(t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \oint_C \int_V \frac{\underline{j}(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, dV' d\underline{x} \quad .$$

Für linienförmige Leiter können wir schreiben (vgl. Abschnitt 3.2)

$$\underline{j}(\underline{x}',t) dV' = J(\underline{x}',t) d\underline{x}'$$

und erhalten

$$\Phi^m(t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \oint_C \int_L \frac{J(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, d\underline{x}' d\underline{x} \quad . \qquad \text{(IV.153)}$$

Der mit L markierte Integrationsbereich erstreckt sich über das gesamte Leitersystem.

Wir nehmen nun an, daß das gesamte Leitersystem aus N geschlossenen Leitern L_B besteht, die jeweils die Fläche S_B aufspannen. Dann können wir schreiben

$$J(\underline{x}',t) = \sum_{B=1}^{N} J_B(\underline{x}',t) \qquad \text{(IV.154)}$$

und erhalten

$$\Phi^m(t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \oint_C \sum_{B=1}^{N} \oint_{L_B} \frac{J_B(\underline{x}_B,t)}{|\underline{x}-\underline{x}'_B|}\, d\underline{x}'_B d\underline{x} \quad .$$

Die Ströme werden nun als konstant in den jeweiligen Leitern L_B angenommen: $J_B = \text{const}$. Es folgt

$$\Phi^m(t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \sum_{B=1}^{N} J_B \oint\limits_C \oint\limits_{L_B} \frac{d\underline{x}'_B d\underline{x}}{|\underline{x} - \underline{x}'_B|} \quad .$$

Bisher war C noch eine beliebige Kontur, wir wollen sie jetzt mit einer der Leiter L_B gleichsetzen und nennen sie L_A und den entsprechenden Fluß Φ^m_A. Dieser berechnet sich zu

$$\Phi^m_A(t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \sum_{B=1}^{N} J_B \oint\limits_{L_A} \oint\limits_{L_B} \frac{d\underline{x}'_B d\underline{x}_A}{|\underline{x}_A - \underline{x}'_B|}$$

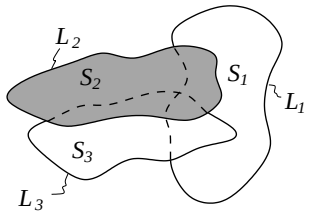
oder

$$\Phi^m_A(t) = \sum_{B=1}^{N} L_{AB} J_B \tag{IV.155}$$

mit der Induktivitätsmatrix

$$L_{AB} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \oint\limits_{L_A} \oint\limits_{L_B} \frac{d\underline{x}'_B d\underline{x}_A}{|\underline{x}_A - \underline{x}'_B|} \tag{IV.156}$$

Die Induktivitätsmatrix ist wesentlich durch die Leitergeometrie festgelegt. Sie ist symmetrisch ($L_{AB} = L_{BA}$) und die Nichtdiagonalelemente $L_{AB}, A \neq B$ beschreiben die gegenseitige Induktionswirkung aufeinander.



Die Diagonalelemente L_{BB} beschreiben die Selbstinduktionswirkung. Für linienförmige Leiter divergieren diese Koeffizienten allerdings:

$$L_{BB} \to \infty \quad (\text{für linienförmige Leiter}). \tag{IV.157}$$

Bei Berücksichtigung endlicher Leiterquerschnitte, wie sie in der Realität ja tatsächlich vorliegen, ist diese Divergenz behoben. Diese Situation ist analog zur „Selbstenergie“ von Punktteilchen.

4.3 Kirchhoffsche Regeln

4.3.1 Stromregel/Knotensatz

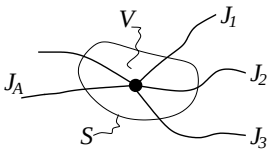
Die Vernachlässigung des Verschiebungsstromes und die Anwendung von

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} = \underline{j}$$

hat

$$\partial_{\underline{x}}\, \underline{j} = 0 \tag{IV.158}$$

zur Folge.



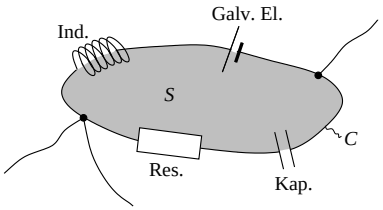
Wir betrachten ein linienförmiges Stromsystem, das einen Punkt (Knoten) gemeinsam hat, der innerhalb des Volumens V liegt. Die Oberfläche S von V kann beliebig weit an den Knoten herangezogen werden. Es gilt

$$0 = \int\limits_V \partial_{\underline{x}}\, \underline{j}\, dV = \oint\limits_S \underline{j}\, d\underline{S} = \sum_{A=1}^{N} J_A \quad . \tag{IV.159}$$

Im Knoten verschindet die Summe aller Ströme. Die J_A sind dabei natürlich vorzeichenbehaftet.

4.3.2 Spannungsregel/Maschensatz

In einem System von Leitern betrachten wie eine Leiterschleife, die eine geschlossene Kontur bildet. Enthalten sind



Galvanische Elemente (Galv. El.)
Kapazitäten (Kap.)
Resistivitäten (Res.)
Induktivitäten (Ind.)

Das Faradaysche Induktionsgestz

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$$

angewandt auf die von der Kontur C umschlossene Fläche S ergibt in integraler Formulierung

$$\int_S \partial_{\underline{x}} \times \underline{E}\, d\underline{S} = \oint_C \underline{E} \cdot d\underline{x} = -\partial_t \int_S \underline{B}\, d\underline{S} = -d_t \Phi^m \quad .$$

Die Zerlegung des Integrationsweges C in die Teilelemente ergibt

$$\int_{\text{Res.}} \underline{E}\, d\underline{x} + \int_{\text{Kap.}} \underline{E}\, d\underline{x} + \int_{\text{Galv. El.}} \underline{E}\, d\underline{x} = -\sum_B L_{AB} d_t J_B \quad .$$

Für die Teilelemente können wir schreiben:

- $$\int_{\text{Res.}} \underline{E}\, d\underline{x} = \int \frac{\underline{j} \cdot d\underline{x}}{\sigma} = \int \frac{j \cdot dx}{\sigma} = \int \frac{J\, dx}{F \cdot \sigma} = \frac{J \cdot l}{F \cdot \sigma} = J \cdot R \quad , \tag{IV.160}$$

wobei $R = l/(\sigma F)$, F die Querschnittsfläche und l die Länge des Elements ist.

- $$\int_{\text{Kap.}} \underline{E}\, d\underline{x} = -\Phi_C = \frac{Q}{C} \tag{IV.161}$$

- $$\int_{\text{Galv. El.}} \underline{E}\, d\underline{x} = -\Phi_e \tag{IV.162}$$

In der Induktivitätsmatrix nehmen wir an, daß benachbarte Leiterschleifen genügend weit entfernt sind, um keinen Einfluß zu haben. Somit gilt

$$\sum_B L_{AB} d_t J_B = L_{AA} d_t J_A = L\, d_t J \quad . \tag{IV.163}$$

Zusammengefaßt gilt dann

$$J \cdot R + \frac{Q}{C} + L\, d_t J = \Phi_e \quad . \tag{IV.164}$$

In einer Masche ist die Summe aller Urspannungen gleich der Summe aller Spannungsabfälle.

4.4 Magnetische Energie eines Systems von Stromkreisen

In Abschnitt 1.5 haben wir die elektrostatische Energie eines Systems von Punktladungen berechnet. Das Vorgehen zur Berechnung der magnetischen Energie eines Systems von Stromkreisen weist eine Reihe von Analogien dazu auf.

Ausgehend von der allgemeinen Definition der elektromagnetischen Energiedichte

$$u = \frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D}+\underline{H}\cdot\underline{B})$$

berechnet sich die Energie des magnetischen Anteils zu

$$U = \frac{1}{2}\int \underline{H}\cdot\underline{B}dV \quad . \tag{IV.165}$$

Wir ersetzen

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}}\times\underline{A}$$

und benutzen

$$\underline{H}\cdot\underline{B} = \underline{H}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{A} = \underline{A}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}+\partial_{\underline{x}}(\underline{A}\times\underline{H}) \quad .$$

Der Anteil $\partial_{\underline{x}}(\underline{A}\times\underline{H})$ liefert keinen Beitrag zur magnetischen Energie, da wir annehmen, daß alle Leiter im Endlichen liegen. Dann gilt für $r\to\infty$

$$\underline{A}(\underline{x}) \propto \frac{1}{|\underline{x}|} = \frac{1}{r}$$
$$\underline{H}(\underline{x}) \propto \frac{1}{|\underline{x}|^2} = \frac{1}{r^2}$$

und somit

$$\int\limits_{V_\infty} \partial_{\underline{x}}(\underline{A}\times\underline{H})dV = \oint\limits_{S_\infty}(\underline{A}\times\underline{H})d\underline{S} \propto \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot r^2 \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Es verbleibt

$$U = \frac{1}{2}\int \underline{A}\cdot\partial_{\underline{x}}\times\underline{H}dV = \frac{1}{2}\int \underline{A}\cdot\underline{j}dV \quad . \tag{IV.166}$$

Verwenden wir weiter

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\frac{\underline{j}(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV'$$

(Erinnerung: Zeit-Retardierung ist vernachlässigt), so folgt

$$U = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\iint\frac{\underline{j}(\underline{x}',t)\underline{j}(\underline{x},t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}dV'dV \quad . \tag{IV.167}$$

Für linienförmige Leiter

$$\underline{j}(\underline{x},t)dV = J(\underline{x},t)d\underline{x}$$

und für ein System aus N geschlossenen Leitern

$$J(\underline{x},t) = \sum_{A=1}^{N} J_A(\underline{x},t)$$

folgt weiter

$$U = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\sum_{A,B=1}^{N}\oint\limits_{L_A}\oint\limits_{L_B}\frac{J_A(\underline{x}',t)J_B(\underline{x},t)d\underline{x}'d\underline{x}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \quad .$$

Sind die Ströme konstant innerhalb ihrer Leiter

$$J_B = \text{const.}$$

können wir zu

$$U = \frac{\mu_0\mu}{8\pi}\sum_{A,B=1}^{N} J_A\cdot J_B\oint\limits_{L_A}\oint\limits_{L_B}\frac{d\underline{x}'d\underline{x}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{A,B=1}^{N} L_{AB}J_AJ_B \tag{IV.168}$$

umformen, wobei L_{AB} die in 4.2 eingeführte Induktivitätsmatrix darstellt. Bezüglich der Divergenz der Selbstinduktionsterme (L_{AA}) bei linieförmigen Leitern gilt die gleiche Überlegung wie in 4.2. Endliche Leiterquerschnitte beheben die Divergenz.

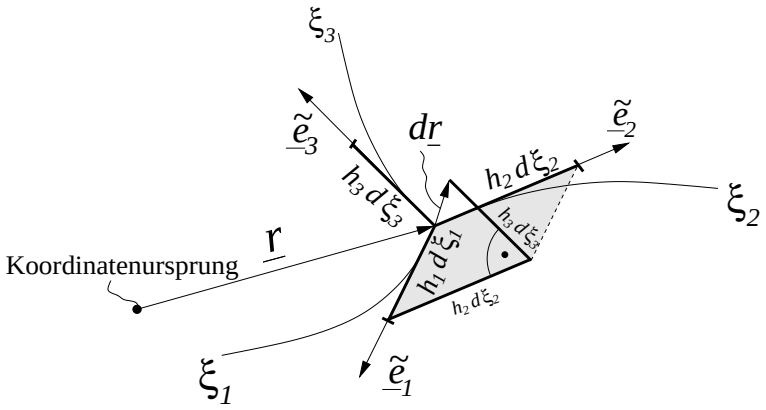
Interessiert nur die Wechselwirkungsenergie zwischen verschiedenen Leiterschleifen, brauchen die Terme mit $A = B$ sowieso nicht beachtet zu werden. Man beachte auch hier wiederum die Analogie zur elektrostatischen Wechselwirkungsenergie zwischen Punktladungen und ebenso zur elektrostatischen Energie eines Systems von Leitern.

Tabelle verschiedener Maßsysteme

	International (SI)	Elektrostatisch	Elektromagnetisch	Gauss	Heaviside-Lorentz
$\partial_{\underline{x}} \times \underline{H} =$	$\underline{j} + \partial_t \underline{D}$	$4\pi \underline{j} + \partial_t \underline{D}$	$4\pi \underline{j} + \partial_t \underline{D}$	$\frac{1}{c}(4\pi \underline{j} + \partial_t \underline{D})$	$\frac{1}{c}(\underline{j} + \partial_t \underline{D})$
$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} =$	$-\partial_t \underline{B}$	$-\partial_t \underline{B}$	$-\partial_t \underline{B}$	$-\frac{1}{c}\partial_t \underline{B}$	$-\frac{1}{c}\partial_t \underline{B}$
$\partial_{\underline{x}} \underline{D} =$	ρ	$4\pi\rho$	$4\pi\rho$	$4\pi\rho$	ρ
$\partial_{\underline{x}} \underline{B} =$	0	0	0	0	0
$\underline{D} =$	$\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$	$\underline{E} + 4\pi \underline{P}$	$\frac{1}{c^2}\underline{E} + 4\pi \underline{P}$	$\underline{E} + 4\pi \underline{P}$	$\underline{E} + \underline{P}$
$\underline{B} =$	$\mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$	$\frac{1}{c^2}(\underline{H} + 4\pi \underline{M})$	$\underline{H} + 4\pi \underline{M}$	$\underline{H} + \underline{M}$	$\underline{H} + \underline{M}$
$\underline{F}_{\text{Lor}} =$	$q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$	$q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$	$q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$	$q(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v} \times \underline{B})$	$q(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v} \times \underline{B})$
$\underline{F}_{\text{Coul.}}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\underline{r}$	$\frac{qq'}{r^3}\underline{r}$	$\frac{1}{c^2}\frac{qq'}{r^3}\underline{r}$	$\frac{qq'}{r^3}\underline{r}$	$\frac{1}{4\pi}\frac{qq'}{r^3}\underline{r}$

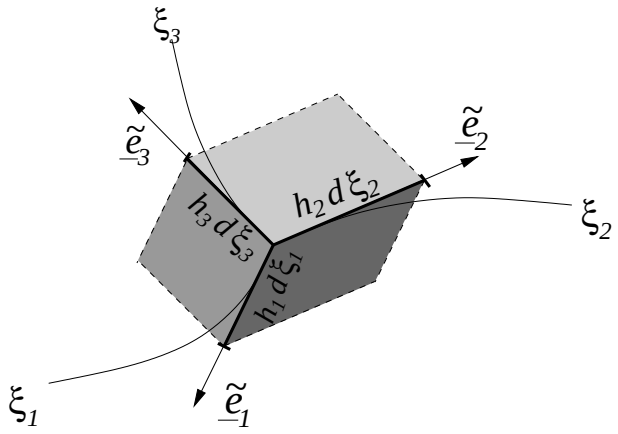
Linienelement

$$d\underline{r} = h_1 d\xi_1 \underline{\tilde{e}}_1 + h_2 d\xi_2 \underline{\tilde{e}}_2 + h_3 d\xi_3 \underline{\tilde{e}}_3$$



Flächenelemente

$$d\underline{S}_1 = h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3 \underline{\tilde{e}}_1$$
$$d\underline{S}_2 = h_1 h_3 d\xi_1 d\xi_3 \underline{\tilde{e}}_2$$
$$d\underline{S}_3 = h_1 h_1 d\xi_1 d\xi_2 \underline{\tilde{e}}_3$$



Volumenelement

$$dV = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$