Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

Klausurvorbereitungsblatt Bearbeitungszeit: keine Abgabe

Benennen Sie alle auftretenden Symbole.

1. **Wissensfragen** **(ca. 1/4 – 1/3 der Gesamtpunktzahl)**

   (a) Geben Sie die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form an. Leiten Sie daraus die Kontinuitätsgleichung her.

   (b) Wie lautet das Poynting-Theorem? Geben Sie die physikalische Bedeutung der im Poynting-Theorem auftretenden Größen an.

   (c) Zeigen Sie, dass die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ invariant unter Eichtransformationen der Potentiale $\underline{A}$ und Φ sind.

   (d) Wie lautet die Eichbedingung der Coulomb-Eichung? Wie lauten die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale $\underline{A}$ und Φ in der Coulomb-Eichung?

   (e) Geben Sie die Definitionen von Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment an. Wie lauten die Beiträge der einzelnen Momente zum Potential $\Phi(\underline{r})$?

   (f) Was sind die Lienert-Wiechert-Potentiale?

   (g) Skizzieren Sie die Strahlungscharakteristik $< |\underline{\Pi}| >$ eines oszillierenden Dipols im Fernfeld (Polardiagramm).

   (h) Was versteht man unter dem Zwillingsparadoxon?

   (i) Was ist der Minkowski-Raum?

   (j) Wie transformieren sich die kovarianten Komponenten eines Lorentz-Tensors zweiter Stufe unter der Lorentz-Transformation?

   (k) Wie verhält sich das magnetische Feld $\underline{B}$ beim Durchgang durch eine Grenzfläche, die zwei Medien mit den Permeabilitätszahlen μ_1 und μ_2 voneinander trennt?

2. **Homogen geladener Draht**

   Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung des elektrischen Feldes eines infinitesimal dünnen, geraden Drahtes.

   (a) Betrachten Sie einen unendlich langen Draht, der die homogene Linienladungsdichte λ (Ladung pro Länge) trägt. Geben Sie für diese Situation zunächst die Ladungsdichte $\rho\,(\underline{r})$ an.

   (b) Berechnen Sie das elektrische Feld mittels $\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\Phi$ direkt aus dem Poisson-Integral *ohne* zuerst Φ auszurechnen.

   (c) Überprüfen Sie das in Teilaufgabe (b) ermittelte Ergebnis für $\underline{E}$ mit Hilfe der integralen Form des Gaußschen Gesetzes.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Laplace-Gleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = 0$ für die Situation aus Teilaufgabe (a) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung reduziert und lösen Sie diese allgemein.

(e) Zeigen Sie, dass das Poisson-Integral für das Potential Φ divergiert. Warum ist das Poisson-Integral hier zumindest für Φ nicht anwendbar? Betrachten Sie jetzt einen geraden, infinitesimal dünnen Draht endlicher Länge L. Der Draht trage wiederum die homogene Linienladungsdichte λ. Bestimmen Sie das Potential $\Phi\left(\underline{r}\right)$.

3. **Elektromagnetische Wellen in einem uniaxialen Dielektrikum**

Betrachten Sie ein Dielektrikum mit $\underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{1}}$ und dem Dielektrizitätstensor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{1}$$

(a) Nehmen Sie an, dass sich die elektromagnetischen Felder $\underline{E}$, $\underline{D}$, $\underline{H}$ und $\underline{B}$ durch ebene Wellen beschreiben lassen. Geben Sie die Gleichungen an, die in diesem Fall aus den Maxwell-Gleichungen folgen.

(b) Zeigen Sie, dass der Energietransport im allgemeinen (für $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) nicht in Ausbreitungsrichtung erfolgt, d.h. bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Poyting-Vektor $\underline{\Pi}$ und dem Wellenvektor $\underline{k}$.

(c) Leiten Sie die folgende Gleichung für $\underline{E}$ ab, ohne ein spezielles Koordinatensystem zu wählen:

$$-\left|\underline{k}\right|^2 \underline{E} + \left(\underline{k} \cdot \underline{E}\right) \underline{k} = -\frac{\omega^2}{c^2}\, \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{E}. \tag{2}$$

c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für ebene Wellen, die sich:

i. parallel zur Symmetrieachse ($z-$Achse) des Kristalls ausbreiten.

ii. senkrecht zur $z-$Achse ausbreiten.

4. **Relativitätstheorie**

(a) Beweisen Sie die relativistische Energie-Impuls-Relation

$$E^{\mathrm{kin}} = \sqrt{\underline{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{mit} \quad \underline{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \underline{v} \quad . \tag{3}$$

(b) *Die Rapidität*

Die spezielle Lorentz-Transformation schreibt man häufig (hier nur die x_1 und t Komponenten) als

$$\mathcal{L}(\beta) = \begin{pmatrix} \cosh(\psi) & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}; \quad \psi = \operatorname{artanh}(?); \quad \beta = v/c \quad . \tag{4}$$

Wodurch müssen die Fragezeichen ersetzt werden? Zwei aufeinanderfolgende Transformationen sollten $\mathcal{L}(\beta_1)\mathcal{L}(\beta_2) = \mathcal{L}(\beta)$ erfüllen. Hat $\mathcal{L}(\beta)$ wieder die Form (4)? Wie hängt β

dann von β_1, β_2 ab? Bleibt $\beta < 1$ selbst für $\beta_1, \beta_2 \to 1$ erfüllt?
Hinweis: Die für die Umformungen der Hyberfunktionen benötigten Zusammenhänge dürfen selbstverständlich nachgeschlagen werden.

5. **Methode der Bildladungen**

   Eine Punktladung q befinde sich in einem Volumen V, das durch zwei geerdete leitende Ebenen begrenzt wird, die sich unter dem Winkel α schneiden.

   (a) Betrachten Sie $\alpha = 90°$, d.h. das Volumen $V = \{\underline{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1, x_2 > 0\}$. Die Punktladung q befinde sich am Ort $\underline{r} = (a\cos(\alpha/2), a\sin(\alpha/2), 0)$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen. Zeigen Sie explizit, dass Ihre Wahl der Bildladungen die Randbedingung $\Phi(\underline{r})|_{\underline{r}\in\partial V} = 0$ erfüllt.

   (b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, dass die Platten den Winkel $\alpha = 180°/n$ einschließen, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Skizzieren Sie Position und Vorzeichen der Bildladungen für $\alpha = 60°$ und $\alpha = 45°$. Wie viele Bildladungen werden allgemein in Abhängigkeit von n benötigt?

6. **Magnetfeld einer Spule**

   Berechen Sie das Magnetfeld einer *endlich* langen Spule auf ihrer Mittelachse. Die Spule habe den Durchmesser $2R$, die Länge L und die Windungszahl N. Die z-Achse soll mit der Mittelachse der Spule übereinstimmen. Gehen Sie wie folgt vor:

   (a) Leiten Sie aus der allgemeinen Lösung für das Vektorpotential $\underline{A}(\underline{x})$ das Biot-Savat-Gesetz

   $$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3r' \tag{5}$$

   für einen linienförmigen Leiter her.

   (b) Bestimmen Sie mittels des Biot-Savart-Gesetzes das Magnetfeld der von einem Strom J durchflossenen Spule auf der Symmetrieachse. Die Spule sei dicht gewickelt.
   Hinweis: Zeigen Sie dazu $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{(3/2)}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$ mittels der Substitution $x = a\sinh u$.

   (c) Zeigen Sie, dass sich im Grenzfall $L \gg R$ das bekannte Magnetfeld einer unendlich langen Spule ergibt.

Die 1. Klausur findet am Fr., 3. August 2012,
die 2. Klausur am Fr., 2. Oktoberl 2012 statt;
beide jeweils um 9.30 Uhr in MS 3.1.