INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2012

9. Übungsblatt Abgabe: Do., 7. Juni 2012 bis 09.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

21. **Brechung und Reflexion an einer ebenen Grenzfläche** **(20 Punkte)**

Eine ebene elektromagnetische Welle

$$\underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \quad ; \quad \underline{B} = \frac{1}{\omega}\,\underline{k}\times\underline{E}$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 \neq 1, \epsilon_2 \neq 1$ und den Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\underline{e}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$ bei $x_3 = 0$ erfüllen?

(b) Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\underline{E}^{R,T} = \underline{E}_0^{R,T}\, e^{i(\underline{k}^{R,T}\cdot\underline{r}-\omega^{R,T}t)} \quad .$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\omega = \omega^R = \omega^T \tag{1}$$

$$|\underline{k}^R| = |\underline{k}| \quad ; \quad |\underline{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}|\underline{k}| \tag{2}$$

$$k_2 = k_2^T = k_2^R = 0 \quad ; \quad k_1 = k_1^T = k_1^R \quad . \tag{3}$$

Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz ($k_3^R = -k_3$) und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(c) Folgern Sie aus den Maxwellschen Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\mathrm{TE-Welle}: \quad \{E_2, B_1, B_3\} \qquad ; \qquad \mathrm{TM-Welle}: \quad \{B_2, E_1, E_3\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

(d) Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so um, dass sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\underline{E}_0^R$ und $\underline{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TE-Welle die Verhältnisse $t = |\underline{E}_0^T|/|\underline{E}_0|$ und $r = |\underline{E}_0^R|/|\underline{E}_0|$ und stellen Sie diese als Funktion von α (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 4$ und $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1.5$. Diskutieren Sie den Verlauf.

Bitte wenden ⟶

(e) Betrachten Sie den Fall, dass das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel α_{total}, ab dem Totalreflexion eintritt. Zeigen Sie, dass k_3^T für $\alpha > \alpha_{total}$ imaginär wird. Beschreiben Sie in Worten die Ortsabhängigkeit der transmittierten Welle für $\alpha > \alpha_{total}$. Zeigen Sie außerdem für die TE-Mode, dass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung δ^R, δ^T bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie δ^R und δ^T als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}^T(\underline{r}, t)$ und $\underline{B}^T(\underline{r}, t)$ für $\alpha > \alpha_{total}$ an. Berechnen Sie im Bereich der Totalreflexion den Poynting-Vektor $\underline{\Pi}^T$ im Medium 2 und bilden Sie das zeitliche Mittel von Π_3^T.

Hinweis: Bei der Berechnung von $\underline{\Pi}$ müssen reelle Felder verwendet werden! Bei der Mittelwertbildung können Sie sich auf die Stelle $x_1 = 0$ beschränken.