



18. Retardierte Potentiale: rotierende Kugel

(11 Punkte)

Eine homogen geladene Vollkugel mit dem Radius R und der Gesamtladung Q beginne zur Zeit $t = 0$ um eine feste Achse durch ihren Mittelpunkt mit konstanter Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ zu rotieren. Der Mittelpunkt der Kugel sei $\underline{0}$. Bestimmen Sie mittels der retardierten Potentiale

$$\Phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad \text{und} \quad \underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

das von dieser Ladungs- und Stromverteilung erzeugte elektromagnetische Feld (also $\underline{E}$ und $\underline{B}$) in den Raumpunkten $\underline{r}$ mit $|\underline{r}| > R$ und für Zeiten t mit $ct \leq |\underline{r}| - R$ bzw. $ct \geq |\underline{r}| + R$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch und interpretieren Sie die einzelnen Beiträge zu $\underline{E}$ und $\underline{B}$ (eine Skizze könnte hilfreich sein). Erläutern Sie insbesondere die Zeitabhängigkeit von $\underline{E}(\underline{r}, t)$ und $\underline{B}(\underline{r}, t)$ für $|\underline{r}| > R$ und gehen Sie (qualitativ) auf den Zeitraum $|\underline{r}| - R < ct < |\underline{r}| + R$ ein.

19. Dipolstrahlung I

(9 Punkte)

In der Vorlesung (Kapitel II, Abschnitt 10) wurde die Reihenentwicklung des retardierten Vektorpotentials

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (1)$$

für große Entfernungen r von einer inselartigen Quellverteilung $\rho(\underline{r}', t), \underline{j}(\underline{r}', t)$ diskutiert. Im folgenden betrachten wir lediglich den ersten Summanden dieser Entwicklung, wobei wir uns auf das Vakuum ($\mu = \epsilon = 1$) beschränken:

$$\underline{A}_1(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad \text{mit} \quad \underline{p}(t) = \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}', t) \quad (2)$$

Dieser Term soll nun für den Spezialfall einer zeitlich oszillierenden Ladungs- und Stromverteilung

$$\rho(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}) \exp(-i\omega t) \quad \text{bzw.} \quad \underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}) \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

explizit ausgewertet und diskutiert werden. Dies führt zur sog. *Dipolstrahlung*.

 Bitte wenden $\longrightarrow$

(a) Zeigen Sie, dass die Auswertung von Gl. (2) auf die Form

$$\underline{A}_1(\underline{r}, t) = \underline{A}_1(\underline{r}) \exp(-i\omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}_1(\underline{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{\mathcal{P}} \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (4)$$

mit dem zeitunabhängigen Dipolmoment

$$\underline{\mathcal{P}} = \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}') \quad (5)$$

führt. Die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ ist wiederum durch $\omega = ck$ festgelegt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gl. (4) das magnetische Feld

$$\underline{B}_1(\underline{r}, t) = \underline{B}_1(\underline{r}) \exp(-i\omega t) = [\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}_1(\underline{r})] \exp(-i\omega t) \quad . \quad (6)$$

Ermitteln Sie damit aus dem Gesetz von Ampère das elektrische Feld $\underline{E}_1(\underline{r}, t) = \underline{E}_1(\underline{r}) \exp(-i\omega t)$. Für große Entfernungen von der Quellverteilung sollte sich näherungsweise

$$\underline{B}_1(\underline{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \underline{e}_r \times \underline{\mathcal{P}} \quad \text{sowie} \quad \underline{E}_1(\underline{r}) \approx c \underline{B}_1(\underline{r}) \times \underline{e}_r \quad (7)$$

ergeben. Diskutieren Sie den Feldverlauf von $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$. Gehen Sie insbesondere auf die Abnahme der Feldstärke für große r ein.